This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

QA641
S8
MATH

DIE GRUNDFORMELN

DER

ALLGEMEINEN FLÄCHENTHEORIE.

VON

Dr. HERMANN STAHL, UND Dr. V. KOMMERELL,
ORD. PROF. DER MATHEMATIK IN TÜBINGEN REPETENT AM SEMINAR IN URACH.

MIT EINER LITHOGRAPHIRTEN TAFEL.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1893.

ÜBERSETZUNGSRECHT VORBEHALTEN.

LIBRARY
LELAND STANFORD JUNIOR
UNIVERSITY

Vorwort.

Die allgemeine Flächentheorie hat seit ihrer Begründung durch Monge und Gauss das Interesse der Mathematiker in besonderem Grade gefesselt. Diesem Interesse sind eine Reihe von zusammenfassenden Darstellungen[1]) entgegengekommen, die sich meist an die rein geometrische Behandlung von Gauss anschliessen, während das neueste, besonders reichhaltige und eigenartige Werk von Darboux wesentlich auf kinematischer Grundlage aufgebaut ist. Wenn es trotzdem nicht ganz leicht ist, die Fülle von Formeln, Sätzen und Aufgaben der Flächentheorie zu übersehen, so scheint dies ein Zeichen dafür zu sein, dass dem Erforderniss einer ebenso allgemeinen wie einfachen und einheitlichen Behandlung des Stoffes noch nicht hinreichend Rechnung getragen ist. Hiermit soll zugleich das Ziel bezeichnet sein, das sich die vorliegende kurze Bearbeitung der fundamentalen Formeln und ihrer wichtigsten Anwendungen gesteckt hat. Das Schriftchen dürfte geeignet sein zur Grundlage bei dem Studium ausführlicher Werke (wie besonders der anregenden Schrift von Bianchi und des Darboux'schen Werkes), in denen neben den analytischen auch die geometrischen Fragen eingehender behandelt sind, oder bei Vorlesungen, in welchen die analytische Entwicklung durch Vorführung der Modelle[2]) specieller Flächengattungen ergänzt und belebt wird.

Den äusseren Anlass zur Veröffentlichung gab eine vor vier Jahren von mir gehaltene Vorlesung über Flächentheorie. Die Ausarbeitung geschah im Verein mit Herrn Kommerell, in dessen Dissertation (Tübingen 1890) schon einzelne Abschnitte in demselben Sinne behandelt sind. Der besseren Uebersicht halber ist der Stoff in drei Theile gegliedert. Der erste Abschnitt (§ 1—6) gibt die Formeln zur Untersuchung einer gegebenen Fläche, der zweite (§ 7—12) die

1) Vgl. S. VI.

2) Mathematische Modelle im Verlag von L. Brill in Darmstadt.

66147

Formeln zur Herleitung einer Fläche aus gegebenen Eigenschaften, der dritte (§ 13—18) die Formeln zur Untersuchung der Flächencurven. Die Anwendungen hätten sich leicht vermehren lassen; doch schien auch hier zur leichteren Uebersicht eine Beschränkung auf die wichtigsten Gruppen von allgemeinen Aufgaben zweckmässig. Zugleich ist durch zahlreiche Literaturangaben die Verbindung mit den Originalabhandlungen hergestellt. Nur an wenig Stellen war es nicht möglich, einen Literaturnachweis zu erbringen; einzelne Hinweise verdanken wir dem Darboux'schen Werke.

Tübingen, August 1892.

H. Stahl.

Inhalt.

I. Untersuchung einer gegebenen Fläche.

		Seite
§ 1.	Gleichungen von Gauss. Fundamentalgrössen erster Ordnung	1
§ 2.	Gleichungen von Gauss. Fundamentalgrössen zweiter Ordnung	5
§ 3.	Minimallinien. Isometrische Linien. Conforme Abbildung	7
§ 4.	Geodätische Linien. Geodätische Coordinaten	12
§ 5.	Conjugirte Richtungen. Krümmungslinien. Asymptotenlinien	16
§ 6.	Anwendung auf Centraflächen	23

II. Herleitung einer Fläche aus gegebenen Eigenschaften.

§ 7.	Fundamentalgleichungen von Gauss und Mainardi	29
§ 8.	Satz von Bonnet	32
§ 9.	Anwendungen. Differentialgleichung gewisser Flächen	37
§ 10.	Anwendung auf ein dreifach orthogonales Flächensystem	44
§ 11.	Sphärische Abbildung. Ebenencoordinaten. Anwendungen	52
§ 12.	Anwendung auf Minimalflächen	60

III. Untersuchung der allgemeinen Flächencurve.

§ 13.	Die allgemeine Raumcurve	79
§ 14.	Die allgemeine Flächencurve. Bestimmung der Radien	84
§ 15.	Sätze über Flächencurven	88
§ 16.	Berechnung der Winkel. Anwendungen	93
§ 17.	Umformungen. Differentialparameter. Anwendungen	98
§ 18.	Transformation der Parameter. Anwendung	105

Uebersicht der Anwendungen.

1. Conforme Abbildung der Kugel auf die Ebene . . . . . § 3.
2. Centraflächen . . . . . § 6.
3. Flächen, deren Hauptkrümmungsradien durch eine Gleichung verbunden sind . . . . . § 6.
4. Differentialgleichung der Flächen von constantem Krümmungsmaass . § 9.
5. Differentialgleichung der Flächen von constanter mittlerer Krümmung § 9.
6. Differentialgleichung der Flächen mit isometrischen Krümmungslinien. § 9.
7. Flächen mit ebenen und sphärischen Krümmungslinien . . . . . § 9 u. 11.
8. Flächen von gegebener sphärischer Abbildung . . . . . § 11.
9. Biegungsflächen einer gegebenen Fläche . . . . . § 9.
10. Kriterien dafür, dass eine Fläche Biegungsfläche einer anderen ist . . § 18.
11. Dreifach orthogonale Flächensysteme. . . . . § 10.
12. Conforme Abbildung des Raumes in sich . . . . . § 10.
13. Minimalflächen (allgemeine Eigenschaften, Gleichung der Fläche, specielle Flächen, Abbildung und Abwicklung, Bestimmung der Fläche durch eine Flächencurve) . . . . . § 12.
14. Sätze über Flächencurven . . . . . § 15.
15. Totalkrümmung eines Flächenstückes . . . . . § 16.
16. Geodätische Linien auf Liouville'schen Flächen . . . . . § 16.
17. Kriterien dafür, dass $\varphi = a$ ein System von Minimallinien, von geodätischen Linien, von geodätisch Parallelen, von isometrischen Linien ist § 17.
18. Strictionslinie eines Curvensystems. . . . . § 17.

Originalwerke und zusammenfassende Darstellungen.

Monge, Applications de l'analyse à la géométrie. 1. A. 1795 u. d. Titel: Feuilles d'analyse appliquées à la géométrie. 5. A. 1850 mit Noten von J. Liouville.

Dupin, Développements de géométrie. 1813.

Gauss, Disquisitiones generales circa superficies curvas. 1827; Werke. IV. p. 217. Deutsch von O. Böklen, Anal. Geom. des Raumes. p. 198 ff. und von A. Wangerin, Leipzig 1889.

Lamé, Leçons sur les cordonnées curvilignes. Paris. 1859.

Lacroix, Calcul diff. 1797. Ausgabe von Hermite u. J. A. Serret. 1874.

Cauchy, Leçons sur les Appl. du calc. inf. à la géométrie. 1826.

Bertrand, Calcul diff. 1864.

Joachimsthal, Anwendung d. Diff.- u. Integralrechnung auf die allg. Theorie der Flächen. Leipzig. 1. A. 1872; 3. A. 1890.

Salmon-Fiedler, Anal. Geom. d. Raumes. II. Th. Leipzig. 1. A. 1865; 3. A. 1880.

Hoppe, Lehrbuch d. anal. Geom. Leipzig. I. Curventheorie. 1880. II. Flächentheorie. 1876.

Böklen, Anal. Geom. d. Raumes. Stuttgart. 2. A. 1884.

Bianchi, Lezioni di geom. diff. Pisa. 1885—86.

Knoblauch, Einl. in d. Theorie d. krummen Flächen. Leipzig. 1888.

Laurent, Traité d'analyse. Bd. VII. Paris. 1891.

Darboux, Leçons sur la théorie gén. des surfaces. Bd. I. II. III. Paris. 1887—92.

I. Untersuchung einer gegebenen Fläche.

§ 1. Gleichungen von Gauss. Fundamentalgrössen erster Ordnung.

Wir stellen zunächst mit einiger Abweichung in der Bezeichnung nach Gauss[1]) die wichtigsten Formeln zusammen, die zur Untersuchung einer Fläche dienen.

Die Coordinaten x, y, z eines Punkts der Fläche seien als Functionen zweier variabler Parameter (u, v) gegeben in der Form:

$$x = x(u, v) \qquad y = y(u, v) \qquad z = z(u, v). \tag{1}$$

Zur Abkürzung wird mitunter gesetzt:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = x_1 \quad \frac{\partial x}{\partial v} = x_2 \quad \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = x_{11} \quad \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = x_{12} \quad \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = x_{22}. \tag{2}$$

Der Ausdruck für das Linienelement ds ist:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= e du^2 + 2f du\, dv + g dv^2, \end{aligned} \tag{3}$$

wo

$$\begin{aligned} e &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 \\ f &= \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} \\ g &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2, \end{aligned} \tag{4}$$

wenn zur Abkürzung von Summen, die symmetrisch in x, y, z sind, nur das auf x bezügliche Glied angeschrieben wird. Die drei Grössen e, f, g, welche nur die ersten Ableitungen von x, y, z enthalten, heissen Fundamentalgrössen erster Ordnung. Wir setzen:

$$\delta^2 = eg - f^2, \tag{5}$$

ein Ausdruck, der stets von 0 verschieden angenommen wird. Ferner sei:

---

1) Gauss, Disq. gen. Art. 3 ff.

$$m = \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial u} \qquad n = \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial u}$$

$$(6)\quad m' = \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial v} \qquad n' = \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial u}$$

$$m'' = \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \qquad n'' = \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial v}.$$

Hiernach lassen sich die Ableitungen von e, f, g nach u, v durch die sechs Grössen m, m', m'', n, n', n'' ausdrücken.

Endlich sei:

$$(7)\quad \begin{aligned} mg - nf &= p\delta^2 & ne - mf &= q\delta^2 \\ m'g - n'f &= p'\delta^2 & n'e - m'f &= q'\delta^2 \\ m''g - n''f &= p''\delta^2 & n''e - m''f &= q''\delta^2, \end{aligned}$$

woraus

$$(7a)\quad p + q' = \frac{1}{\delta}\frac{\partial \delta}{\partial u} \qquad q'' + p' = \frac{1}{\delta}\frac{\partial \delta}{\partial v}.$$

Der Winkel (C, C_1), den zwei Curven C und C_1 im Punkte (u, v), deren Richtungen durch die Quotienten $(du : dv)$ und $(d_1u : d_1v)$ gegeben sind, mit einander bilden, ist bestimmt durch:

$$(8)\quad \begin{aligned} \cos(C, C_1) &= \frac{e\,du\,d_1u + f(du\,d_1v + dv\,d_1u) + g\,dv\,d_1v}{ds \cdot d_1s} \\ \sin(C, C_1) &= \delta \cdot \frac{du\,d_1v - dv\,d_1u}{ds \cdot d_1s}. \end{aligned}$$

Hiernach ist der Winkel ω, den die beiden Parametercurven $v = \text{const.}$ und $u = \text{const.}$ mit einander bilden, bestimmt durch:

$$(9)\quad \cos\omega = \frac{f}{\sqrt{eg}} \qquad \sin\omega = \frac{\delta}{\sqrt{eg}} \qquad \operatorname{tg}\omega = \frac{\delta}{f}$$

und die Gleichung

$$(10)\quad f = 0$$

ist die Bedingung dafür, dass die Parametercurven sich rechtwinklig durchschneiden.

Das Oberflächenelement do hat den Werth:

$$(11)\quad do = \sin\omega\sqrt{eg}\,du\,dv = \delta\,du\,dv.$$

Aus der letzten Gleichung (9) folgt:

$$(12)\quad d\omega = \frac{f d\delta - \delta df}{eg} = \frac{f(edg + gde) - 2eg\,df}{2eg\,\delta}$$

oder

$$(13)\quad -d\omega = \left(\frac{\delta q}{e} + \frac{\delta p'}{g}\right)du + \left(\frac{\delta p''}{g} + \frac{\delta q'}{e}\right)dv$$

und hieraus:

$$(14)\quad -\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\delta p''}{g} + \frac{\delta q'}{e}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\delta q}{e} + \frac{\delta p'}{g}\right).$$

Wir bezeichnen ferner mit:

(a, b, c) [1]) die Cosinus der Neigungswinkel, welche die Flächennormale und mit

$(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ und $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ die Cosinus der Neigungswinkel, welche bezüglich die Tangenten der Curven $v =$ const. und $u =$ const. im Punkt (u, v) mit den Coordinatenaxen bilden.

Zwischen diesen neun Cosinus bestehen sechs Relationen. Um dieselben zu erhalten, denke man sich, vom Nullpunkt ausgehend, zwei Coordinatensysteme: das rechtwinklige (x, y, z) und ein zweites (x', y', z'), in welchem die z'-Axe parallel der Flächennormale, die x'- und y'-Axe parallel den Tangenten der Curven $v =$ const. und $u =$ const. sind. Bezeichnet man die Coordinaten eines beliebigen Punktes in diesen beiden Systemen durch (x, y, z) und (x', y', z'), so hat man die Transformationsformeln:

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + a z' \\ y &= \beta_1 x' + \beta_2 y' + b z' \\ z &= \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + c z'. \end{aligned} \tag{15}$$

Aus der Identität:

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 + 2x'y' \cos \omega \tag{16}$$

erhält man als Auflösung der Gleichungen (15):

$$\begin{aligned} x' + y' \cos \omega &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z \\ y' + x' \cos \omega &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z \\ z' &= a x + b y + c z \end{aligned} \tag{17}$$

und es ergeben sich die gesuchten Relationen entweder in der Form:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 1 & \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 &= \cos\omega \\ \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 &= 1 & a\alpha_1 + b\beta_1 + c\gamma_1 &= 0 \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 &= 1 & a\alpha_2 + b\beta_2 + c\gamma_2 &= 0 \end{aligned} \tag{18}$$

oder in der Form:

$$\begin{aligned} a^2 \sin^2\omega + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 2\alpha_1\alpha_2 \cos\omega &= \sin^2\omega \\ ab \sin^2\omega + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 - (\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2)\cos\omega &= 0, \end{aligned} \tag{19}$$

nebst den Gleichungen, die hieraus durch cyklische Vertauschung folgen.

Nach (18) ist:

$$\begin{vmatrix} a & \alpha_1 & \alpha_2 \\ b & \beta_1 & \beta_2 \\ c & \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} = |a \quad \alpha_1 \quad \alpha_2| = \pm \sin\omega, \tag{20}$$

1) Diese Grössen werden später (§ 11) auch mit (X, Y, Z) bezeichnet.

wenn man zur Abkürzung für eine solche in a, b, c; $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ symmetrisch gebildete Determinante nur die a, α_1, α_2 enthaltende Reihe anschreibt. Unter der Voraussetzung, dass in (20) das positive Vorzeichen gewählt werde, hat man noch:

$$\begin{aligned} \beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2 &= a \sin\omega \\ \sin\omega\,(b\gamma_1 - c\beta_1) &= \alpha_2 - \alpha_1 \cos\omega \\ \sin\omega\,(c\beta_2 - b\gamma_2) &= \alpha_1 - \alpha_2 \sin\omega \end{aligned} \tag{21}$$

nebst den Gleichungen, die hieraus durch cyklische Vertauschung folgen.

Als Functionen von (u, v) drücken sich die Cosinus $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ und $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ aus durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial x}{\partial u} & \beta_1 &= \frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial y}{\partial u} & \gamma_1 &= \frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial z}{\partial u} \\ \alpha_2 &= \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial x}{\partial v} & \beta_2 &= \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial y}{\partial v} & \gamma_2 &= \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial z}{\partial v} \end{aligned} \tag{22}$$

und die Cosinus (a, b, c) nach (21) durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \delta\,.\,a &= \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} \\ \delta\,.\,b &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} \\ \delta\,.\,c &= \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}, \end{aligned} \tag{23}$$

während (20) übergeht in:

$$\delta = \left| a \;\; \frac{\partial x}{\partial u} \;\; \frac{\partial x}{\partial v} \right|. \tag{24}$$

Wir merken für späteren Gebrauch noch Folgendes an. Aus (23) ergibt sich, wenn man die Abkürzungen (2) benutzt:

$$\delta \begin{vmatrix} b & c \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} = ex_2 - fx_1 \qquad \delta \begin{vmatrix} b & c \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} = fx_2 - gx_1. \tag{25}$$

Ferner folgt aus der ersten Gleichung (23), wenn man quadrirt und (4) benutzt:

$$\delta^2 a^2 = (e - x_1^2)(g - x_2^2) - (f - x_1 x_2)^2 \tag{26}$$

oder:

$$a = \sqrt{1 - \delta'(x)}, \tag{27}$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird (vgl. § 17):

$$\delta'(x) = \frac{1}{\delta^2}(ex_2^2 - 2fx_1x_2 + gx_1^2). \tag{28}$$

§ 2. Fundamentalgrössen zweiter Ordnung.

Zu den drei Functionen e, f, g, die aus den ersten Ableitungen von x, y, z nach u, v gebildet sind, treten noch drei weitere Functionen[1]) d, d', d'', welche auch die zweiten Ableitungen von x, y, z enthalten und daher auch Fundamentalgrössen zweiter Ordnung heissen. Dieselben sind definirt durch:

$$\begin{aligned} d &= a\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + b\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + c\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \sum a\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \\ d' &= a\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + b\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} + c\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} = \sum a\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} \\ d'' &= a\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + b\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} + c\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = \sum a\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}. \end{aligned} \tag{1}$$

Durch Differentiation der aus (18) und (22) § 1 sich ergebenden Gleichungen:

$$\sum a\frac{\partial x}{\partial u} = 0 \qquad \sum a\frac{\partial x}{\partial v} = 0 \tag{2}$$

folgt:

$$\begin{gathered} \sum \frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} = -d \qquad \sum \frac{\partial a}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} = -d' \\ \sum \frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = \sum \frac{\partial a}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} = -d' \end{gathered} \tag{3}$$

und hieraus:

$$\begin{aligned} \sum \frac{\partial a}{\partial u}dx = \sum \frac{\partial x}{\partial u}da &= -(d\,du + d'dv) \\ \sum \frac{\partial a}{\partial v}dx = \sum \frac{\partial x}{\partial v}da &= -(d'du + d''dv) \end{aligned} \tag{4}$$

$$\sum a\,d^2x = -\sum da\,dx = d\,du^2 + 2d'du\,dv + d''dv^2.$$

Durch Multiplication von $\left|a\ \frac{\partial a}{\partial u}\ \frac{\partial a}{\partial v}\right|$ mit $\left|a\ \frac{\partial x}{\partial v}\ \frac{\partial x}{\partial v}\right|$ erhält man:

$$dd'' - d'^2 = \delta\left|a\ \frac{\partial a}{\partial u}\ \frac{\partial a}{\partial v}\right|. \tag{5}$$

Zunächst lassen sich nun mit Hilfe der Grössen e, f, g, d, d', d'' die Ableitungen $\frac{\partial a}{\partial u}, \frac{\partial a}{\partial v}$ linear durch $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}$ darstellen und umgekehrt. Löst man nämlich die in (3) auftretenden Gleichungen:

$$\begin{gathered} a\frac{\partial a}{\partial u} + b\frac{\partial b}{\partial u} + c\frac{\partial c}{\partial u} = 0 \\ \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial a}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial b}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial c}{\partial u} = -d \\ \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial a}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial b}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial c}{\partial u} = -d' \end{gathered}$$

1) Gauss, Disq. gen. Art. 10.

nach $\frac{\partial a}{\partial u}$, $\frac{\partial b}{\partial u}$, $\frac{\partial c}{\partial u}$ auf, so folgt:

$$(6)\qquad \frac{\partial a}{\partial u} = \varrho' \frac{\partial x}{\partial u} + \sigma' \frac{\partial x}{\partial v} \qquad \frac{\partial a}{\partial v} = \varrho'' \frac{\partial x}{\partial u} + \sigma'' \frac{\partial x}{\partial v}\ ^{1}),$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$(7)\qquad \begin{aligned} f\mathfrak{d}' - g\mathfrak{d} &= \varrho'\delta^2 & f\mathfrak{d} - e\mathfrak{d}' &= \sigma'\delta^2 \\ f\mathfrak{d}'' - g\mathfrak{d}' &= \varrho''\delta^2 & f\mathfrak{d}' - e\mathfrak{d}'' &= \sigma''\delta^2. \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$(8)\qquad \begin{aligned} e\varrho'' + f(\sigma'' - \varrho') - g\sigma' &= 0 \\ \mathfrak{d}\varrho'' + \mathfrak{d}'(\sigma'' - \varrho') - \mathfrak{d}''\sigma' &= 0. \end{aligned}$$

Es besteht ferner ein System von Gleichungen, welches zeigt, dass sich auch die zweiten und höheren partiellen Ableitungen von x, y, z oder auch von a, b, c nach u, v sämmtlich linear darstellen lassen durch die ersten Ableitungen von x, y, z nach u, v und durch die Grössen a, b, c oder auch durch die ersteren Grössen allein. Man hat nämlich[2]):

$$(9)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} - p\frac{\partial x}{\partial u} - q\frac{\partial x}{\partial v} &= \mathfrak{d}\cdot a = \mathfrak{d}\cdot\sqrt{1-\delta'(x)} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} - p'\frac{\partial x}{\partial u} - q'\frac{\partial x}{\partial v} &= \mathfrak{d}'\cdot a = \mathfrak{d}'\cdot\sqrt{1-\delta'(x)} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} - p''\frac{\partial x}{\partial u} - q''\frac{\partial x}{\partial v} &= \mathfrak{d}''\cdot a = \mathfrak{d}''\cdot\sqrt{1-\delta'(x)} \end{aligned}$$

nebst den entsprechenden Gleichungen in y und b, z und c.

In der That ist nach (23) § 1 und (1), wenn man die Abkürzungen (2) § 1 benutzt:

$$\mathfrak{d}\cdot a = \frac{1}{\delta^2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 0 & y_1 & y_2 \\ 0 & z_1 & z_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_{11} & x_1 & x_2 \\ y_{11} & y_1 & y_2 \\ z_{11} & z_1 & z_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\delta^2}\begin{vmatrix} x_{11} & x_1 & x_2 \\ m & e & f \\ n & f & g \end{vmatrix},$$

womit die erste Gleichung (9) bewiesen ist, wenn man noch (27) § 1 zuzieht; ebenso erhält man die beiden anderen Gleichungen.

Wir schliessen noch zwei Bemerkungen an, die später benutzt werden. Zuerst eine Umformung der Gleichungen (6) und (9). Trägt man die Werthe (22) § 1 ein und berücksichtigt die Gleichungen (21) § 1, so ergibt sich aus (6) und (9) eine Darstellung der Differentiale da, da_1, da_2 durch a, a_1, a_2, nämlich:

---

1) Rodrigues, Correspond. sur l'École polyt. Bd. III. S. 162 (1815) für Krümmungslinien als Parametercurven (vgl. (5) § 9); Weingarten, Journal für Math. Bd. 59. S. 382 (1861) für allgemeine Parametercurven.

2) Gauss, Disq. gen. Art. 11.

$$da = \alpha_1 \sqrt{c}(\varrho' du + \varrho'' dv) + \alpha_2 \sqrt{g}(\sigma' du + \sigma'' dv), \tag{10}$$

$$\begin{aligned} d\alpha_1 &= \frac{a}{\sqrt{e}}(\mathfrak{d}\,du + \mathfrak{d}'dv) - (\alpha_1 f - \alpha_2\sqrt{eg})\frac{q\,du + q'dv}{e} \\ d\alpha_2 &= \frac{a}{\sqrt{g}}(\mathfrak{d}'du + \mathfrak{d}''dv) - (\alpha_2 f - \alpha_1\sqrt{eg})\frac{p'du + p''dv}{g}. \end{aligned} \tag{11}$$

Sodann folgendes. Multiplicirt man die drei Gleichungen (9) bez. mit g, $-2f$, e, addirt und setzt zur Abkürzung (vgl. § 17):

$$\delta^2 \cdot \delta''(x) = g(x_{11} - px_1 - qx_2) - 2f(x_{12} - p'x_1 - q'x_2) + e(x_{22} - p''x_1 - q''x_2) \tag{12}$$

oder auch, wie eine leichte Rechnung mit Benutzung der Gleichungen (6, 7, 7a) § 1 ergibt:

$$\delta''(x) = \frac{1}{\delta}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{gx_1 - fx_2}{\delta}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{ex_2 - fx_1}{\delta}\right)\right], \tag{13}$$

so folgt:

$$a(e\mathfrak{d}'' - 2f\mathfrak{d}' + g\mathfrak{d}) = \delta^2 \cdot \delta''(x). \tag{14}$$

Ferner erhält man aus den Gleichungen (9), wenn man die linken Seiten derselben abkürzend mit $(x)_{11}$, $(x)_{12}$, $(x)_{22}$ bezeichnet:

$$a^2(\mathfrak{d}\mathfrak{d}'' - \mathfrak{d}'^2) = (x)_{11}(x)_{22} - (x)_{12}^2. \tag{15}$$

Aus (14) und (15) erhält man wegen (27) § 1 die Darstellungen:

$$h = \frac{e\mathfrak{d}'' - 2f\mathfrak{d}' + g\mathfrak{d}}{eg - f^2} = \frac{\delta''(x)}{\sqrt{1 - \delta'(x)}}, \tag{16}$$

$$k = \frac{\mathfrak{d}\mathfrak{d}'' - \mathfrak{d}'^2}{eg - f^2} = \frac{(x)_{11}(x)_{22} - (x)_{12}^2}{\delta^2(1 - \delta'(x))}. \tag{17}$$

Die hier abkürzend benutzten Werthe h und k stellen die mittlere Krümmung und das Krümmungsmaass der Fläche im Punkt (u, v) vor (vgl. § 5). Die Gleichungen (16) und (17) geben eine eigenthümliche Darstellung dieser Grössen durch x (oder y, z) und seiner Ableitungen nach u und v.

Bemerkung. In den bereits entwickelten und noch folgenden Formeln gehen durch Vertauschung von u und v die Grössen

$$e, f, g, \mathfrak{d}, \mathfrak{d}', \mathfrak{d}'', m, m', m'', p, p', p'', \varrho', \sigma'$$

bezüglich über in

$$g, f, e, \mathfrak{d}'', \mathfrak{d}', \mathfrak{d}, n'', n', n, q'', q', q, \sigma'', \varrho''.$$

§ 3. Minimallinien. Isometrische Linien. Conforme Abbildung der Fläche.

Jede Gleichung zwischen (u, v) stellt eine Curve auf der Fläche dar. Das sich aus ihr ergebende Verhältniss $du : dv$ bestimmt die Fortschrittsrichtung oder die Richtung des Linienelements der Curve

im Punkt (u, v). Wir betrachten in den folgenden §§ die Differentialgleichungen der wichtigsten, besonderen Flächencurven. Ebenso wie der Charakter und die Eigenschaften der Fläche selber, so sind auch diese Curven bestimmt durch die sechs fundamentalen Grössen e, f, g; $\mathfrak{d}, \mathfrak{d}', \mathfrak{d}''$.

Minimallinien heissen[1]) die Curvensysteme auf der Fläche, die definirt sind durch die Gleichung:

$$(1) \qquad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0,$$

deren Differentialgleichung also lautet:

$$(2) \qquad ds^2 = edu^2 + 2fdu\,dv + gdv^2 = 0.$$

Nach (1) sind die Minimallinien geometrisch definirt als diejenigen Curven auf der Fläche, deren Tangenten den unendlich fernen Kugelkreis schneiden.

Die Bedingung dafür, dass die Parametercurven $u = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$ selber Minimallinien sind, ist nach (2):

$$(2a) \qquad e = g = 0.$$

Die Gleichung (2) ist vom zweiten Grad in $du : dv$, durch jeden Punkt der Fläche gehen daher zwei Minimallinien. Diese Linien sind zwar für reelle Flächen, bei reellem e, f, g imaginär, da die Discriminante von (2) $\delta^2 = eg - f^2$ positiv ist. Sie führen aber zu wichtigen, reellen Liniensystemen. Hierzu denke man sich die Gleichung (2) in ihre beiden conjugirt imaginären Factoren zerlegt:

$$(3) \quad P = \frac{1}{\sqrt{e}}(edu + fdv + i\delta\,dv) \qquad Q = \frac{1}{\sqrt{e}}(edu + fdv - i\delta\,dv).$$

Es gibt bekanntlich unendlich viele integrirende Factoren, die einen solchen Differentialausdruck in ein vollständiges Differential verwandeln. Ein solcher Factor sei für P gleich $\mu + i\nu$ und das zugehörige Differential $d\alpha + id\beta$, wo μ, ν und α, β gewisse reelle Functionen von (u, v). Dann ist

$$P(\mu + i\nu) = d\alpha + id\beta \qquad Q(\mu - i\nu) = d\alpha - id\beta,$$

also

$$(4) \qquad ds^2 = PQ = \lambda^2(d\alpha^2 + d\beta^2) \qquad \lambda^2 = \frac{1}{\mu^2 + \nu^2}.$$

Die Herstellung dieser Form (4) für das Linienelement erfordert also die Integration der Differentialgleichung (2). Die Curven $\alpha(u, v) = \text{const.}$ und $\beta(u, v) = \text{const.}$ oder kurz α und β besitzen eine charakteristische geometrische Eigenschaft. Führt man nämlich α, β an Stelle von (u, v) als Parameter ein, so nimmt ds^2 die Form (4) an, die im Vergleich mit (2) dadurch ausgezeichnet ist, dass der

1) Nach dem Vorgang von Lie, Math. Ann. XIV. p. 337 (1878).

Coefficient von $d\alpha d\beta$ Null ist und dass die Coefficienten von $d\alpha^2$ und $d\beta^2$ einander gleich sind. Das erste sagt aus, dass die Curvensysteme α, β sich orthogonal durchschneiden, das zweite, dass sich die Fläche durch die Curvensysteme α, β in unendlich kleine Quadrate theilen lässt. Denn betrachtet man α, β gleichzeitig als rechtwinklige Coordinaten in einer Ebene, so folgt aus (4), dass die Fläche durch die Gleichungen $\alpha(u, v) = \alpha$, $\beta(u, v) = \beta$ conform auf die Ebene abgebildet wird[1]) mit der linearen Vergrösserung λ, wobei dem System der zu den Axen in der Ebene parallelen Linien das Curvensystem α, β auf der Fläche entspricht. Da sich nun die Ebene durch die Linien α, β in unendlich kleine Quadrate theilen lässt, so gilt dasselbe von der Fläche. Wegen dieser Eigenschaft heisst das System α, β ein isometrisches (isothermes) Curvensystem der Fläche und die Grössen α, β thermische Parameter. Dies gibt den Satz:

Jede Lösung der Differentialgleichung (2) liefert ein isometrisches Curvensystem auf der Fläche, dessen Parameter α, β dem Linienelement die Form (4) ertheilen, also die Fläche conform auf die Ebene abbilden.

Entsprechend den unendlich vielen integrirenden Factoren von (3) gibt es auf jeder Fläche unendlich viele isometrische Liniensysteme. Um den Uebergang von einem solchen System zu einem anderen zu machen, sei wieder $\mu + i\nu$ ein integrirender Factor von P und $d\alpha + id\beta$ das zugehörige Differential. Dann ist bekanntlich der allgemeinste integrirende Factor von P in der Form enthalten

$$(\mu + i\nu)\, F(\alpha + i\beta),$$

wo F eine willkürliche Function bezeichnet. Setzt man nun

$$P\cdot(\mu+i\nu)F(\alpha+i\beta)=F(\alpha+i\beta)(d\alpha+id\beta)=d\Pi(\alpha+i\beta)=dA+idB,$$

so nimmt ds^2 die Form an

$$ds^2 = L^2(dA^2 + dB^2), \tag{5}$$

d. h. die zwei Curvenschaaren A, B bilden ebenfalls ein isometrisches System auf der Fläche. Da Π ebenso willkürlich ist wie F, so hat man den Satz:

Ist (α, β) ein isometrisches System, so erhält man aus ihm unendlich viele andere isometrische Systeme (A, B), indem man, unter Π eine willkürliche Function verstanden,

$$A + iB = \Pi(\alpha + i\beta) \tag{6}$$

setzt und in dieser Gleichung die reellen und imaginären Bestandtheile trennt.

---

1) Lagrange (1779) für das Relationsellipsoid (Werke. t. IV. p. 637). Gauss (1822) für die allgemeine Fläche (Werke. Bd. IV. p. 193).

Dies deckt sich mit dem bekannten Satze der Functionentheorie: Trennt man den reellen und imaginären Bestandtheil einer Function der complexen Variablen $\alpha + i\beta$, so erhält man zwei Functionen A, B, die eine conforme Abbildung der Ebene (α, β) auf die Ebene (A, B) bewirken.

Umgekehrt zeigt sich, dass durch die Gleichung (6) auch sämmtliche isometrische Curvenschaaren der Fläche bestimmt sind.

Denn sind (α, β) und (A, B) zwei solche Schaaren, so müssen dieselben durch zwei Gleichungen $A = A(\alpha, \beta)$ und $B = B(\alpha, \beta)$ verbunden sein von der Art, dass

$$ds^2 = \lambda^2(d\alpha + id\beta)(d\alpha - id\beta) = L^2(dA + idB)(dA - idB).$$

Da nun dA und dB linear und homogen in $d\alpha$ und $d\beta$ sind, so folgt

$$dA + idB = \varrho(d\alpha \pm id\beta)$$

und da hier die linke Seite ein vollständiges Differential ist, so muss dasselbe von der rechten Seite gelten, also ϱ eine Function von $(\alpha \pm i\beta)$ sein, was auf die Gleichung (6) zurückführt.

Aus diesen Betrachtungen ergibt sich auch das Kriterium dafür, dass die Parametercurven u, v selber ein isometrisches System auf der Fläche bilden. Für diesen Fall muss ds^2 nach (4) die Form haben

$$ds^2 = l(Udu^2 + Vdv^2), \tag{7}$$

wo U Function von u, V Function von v allein, l eine beliebige Function von (u, v) ist. Die Vergleichung mit (1) gibt als nothwendige und hinreichende Bedingungen für die Isometrie:

$$f = 0 \quad e = lU \quad g = lU \quad \text{oder} \quad e : g = U : V = V_1 : U_1. \tag{8}$$

Man kann denselben eine andere Form geben; da

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{e}{l}\right) = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{g}{l}\right) = 0$$

ist, so erhält man durch Elimination von l statt (8) die Gleichungen:

$$f = 0 \qquad \frac{\partial^2 \log e}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 \log g}{\partial u \partial v}. \tag{9}$$

Sind diese Bedingungen erfüllt, so ergibt sich l aus

$$\log l = \int\left(\frac{\partial \log g}{\partial u}du + \frac{\partial \log e}{\partial v}dv\right). \tag{10}$$

Ist insbesondere $U = V = 1$, also $f = 0$, $e = g$, so sind (u, v) thermische Parameter.

Als Anwendung behandeln wir die später zu benutzende Aufgabe:

Die Kugel conform auf die Ebene abzubilden.

Zuerst drücke man die Coordinaten X, Y, Z eines Punktes P der Kugel durch die Parameter u, v der Minimallinien der Kugel aus. Die Kugel habe den Radius 1 und ihren Mittelpunkt im Nullpunkt, diese Kugel bezeichnen wir hier und später mit K. Sei $Z = 0$ die Aequatorebene, ϱ der Radius des Parallelkreises von P und ψ der Winkel, der die Meridianebene von P mit der Ebene $Y = 0$ bildet. Dann hat man für X, Y, Z die Werthe

$$X = \varrho \cos\psi \qquad Y = \varrho \sin\psi \qquad Z = \sqrt{1-\varrho^2}. \tag{11}$$

Sind (u, v) die Parameter der Minimallinien und drückt man das Linienelement dS der Kugel einerseits durch (ϱ, ψ), andererseits durch (u, v) aus, so erhält man:

$$dS^2 = \frac{d\varrho^2}{1-\varrho^2} + \varrho^2 d\psi^2 = F(u,v)\,\frac{du}{u}\,\frac{dv}{v}; \tag{12}$$

wo $F(u, v)$ eine noch zu bestimmende Function ist. Durch Zerlegung folgt

$$\frac{d\varrho}{\varrho\sqrt{1-\varrho^2}} + i\,d\psi = \frac{du}{u} \qquad \frac{d\varrho}{\varrho\sqrt{1-\varrho^2}} - i\,d\psi = \frac{dv}{v} \qquad \varrho^2 = F(u,v)$$

oder

$$\frac{d\varrho}{\varrho\sqrt{1-\varrho^2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{du}{u} + \frac{dv}{v}\right) \qquad i\,d\psi = \frac{1}{2}\left(\frac{du}{u} - \frac{dv}{v}\right)$$

oder

$$\varrho = \frac{2\sqrt{uv}}{1+uv} \qquad i\psi = \frac{1}{2}\log\left(\frac{u}{v}\right) \tag{13}$$

$$\cos\psi = \frac{u+v}{2\sqrt{uv}} \qquad \sin\psi = \frac{u-v}{2i\sqrt{uv}}. \tag{14}$$

Hiernach sind $u \cdot v = \text{const.}$ die Parallellinien, $u : v = \text{const.}$ die Meridiancurven der Kugel K. Aus (11) folgt

$$X = \frac{u+v}{1+uv} \qquad Y = i\,\frac{v-u}{1+uv} \qquad Z = \frac{uv-1}{1+uv} \tag{15}$$

und durch Auflösung

$$u = \frac{X+iY}{1-Z} \qquad v = \frac{X-iY}{1-Z}. \tag{16}$$

Wir setzen nun die Kugel K durch stereographische Projection mit der Ebene in Verbindung[1]). Ist der Pol ($X = Y = 0$, $Z = 1$) das Projectionscentrum, die Aequatorebene $Z = 0$ die Projectionsebene, ferner X, Y, Z ein Punkt der Kugel und ξ, η sein Bildpunkt,

1) Riemann, Ges. Werke p. 286 (1867).

so sind diese Coordinaten (wenn die ξ- und η-Axe mit der X- und Y-Axe zusammenfallen) verbunden durch die Gleichungen:

$$(17) \qquad \xi = \frac{X}{1-Z} \qquad \eta = \frac{Y}{1-Z} \qquad \xi^2 + \eta^2 = \frac{1+Z}{1-Z}$$

oder

$$(18) \qquad X = \frac{2\xi}{\xi^2+\eta^2+1} \qquad Y = \frac{2\eta}{\xi^2+\eta^2+1} \qquad Z = \frac{\xi^2+\eta^2-1}{\xi^2+\eta^2+1}.$$

Aus (16) und (17) folgt

$$(19) \qquad u = \xi + i\eta \qquad v = \xi - i\eta.$$

Daher sind die Parameter u, v der Minimallinien der Kugel identisch mit den conjugirten Werthen $\xi + i\eta$ und $\xi - i\eta$, gebildet aus den Coordinaten des Projectionspunktes. Nach (12), (13) und (19) ist

$$(20) \qquad dS^2 = \frac{4\,du\,dv}{(1+uv)^2} = \frac{4(d\xi^2+d\eta^2)}{(\xi^2+\eta^2+1)^2}.$$

Daher der auch geometrisch leicht zu beweisende Satz:

Die Kugel wird durch die stereographische Proportion conform auf die Ebene abgebildet.

Die Curven $\xi = \alpha$, $\eta = \beta$ bilden nach (20) ein specielles isometrisches System auf der Kugel. Das allgemeinste isometrische System wird erhalten, indem man den reellen und imaginären Bestandtheil einer beliebigen Function der complexen Variabeln $\xi + i\eta$ gleich Constanten setzt. Sind also L und M conjugirte Functionen und

$$(21) \quad L(u) = L(\xi + i\eta) = \Xi + iH \qquad M(v) = M(\xi - i\eta) = \Xi - iH,$$

so stellen $\Xi(\xi, \eta) = A$, $H(\xi, \eta) = B$ das allgemeinste isometrische System auf der Kugel vor. Setzt man

$$L(u) = \int \sqrt{P}(u)\,du \qquad M(v) = \int \sqrt{Q}(v)\,dv,$$

so folgt aus (21)

$$2d\Xi = \sqrt{P}du + \sqrt{Q}du \qquad 2idH = \sqrt{P}du - \sqrt{Q}dv.$$

Daher ist die Differentialgleichung des allgemeinsten isometrischen Systems auf der Kugel in den Parametern (u, v) von der Form

$$(22) \qquad Pdu^2 - Qdv^2 = 0,$$

wo P und Q beliebige conjugirte Functionen bezüglich von u und v sind. Umgekehrt ist jede solche Gleichung die Differentialgleichung eines isometrischen Systems der Kugel.

§ 4. Geodätische Linien. Geodätische Coordinaten.

Geodätische Linien auf der Fläche heissen die Curven, deren Hauptnormale in jedem Punkte mit der Flächennormale zu-

sammenfällt, oder deren Schmiegungsebene durch die Flächennormale hindurchgeht.

Die Gleichung der Flächennormale im Punkte x, y, z ist, wenn ξ, η, ζ die Coordinaten eines variabeln Punktes der Normale sind und r der Abstand beider Punkte:

$$\xi - x = ra \qquad \eta - y = rb \qquad \zeta - z = rc. \tag{1}$$

Ferner ist für eine Raumcurve, deren Punkte x, y, z als Functionen eines Parameters gegeben sind, die Gleichung der Schmiegungsebene in (x, y, z), wenn ξ, η, ζ die laufenden Coordinaten sind,

$$| \xi - x \; dx \; d^2x | = 0. \tag{2}$$

Drückt man aus, dass die Schmiegungsebene (2) die Normale (1) enthält, so hat man die Differentialgleichung der geodätischen Linie in der Form:

$$| a \; dx \; d^2x | = 0. \tag{3}$$

Um dieselbe in den Parametern (u, v) und deren Differentialen zu erhalten, multiplicire man die linke Seite mit der Determinante (24) § 1; dann geht (3) über in

$$\begin{vmatrix} edu + fdv & mdu^2 + 2m'dudv + m''dv^2 + ed^2u + fd^2v \\ fdu + gdv & ndu^2 + 2n'dudv + n''dv^2 + fd^2u + gd^2v \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Diese Differerentialgleichung hängt nur von den Coefficienten e, f, g des Linienelementes ab; sie ist ferner von der zweiten Ordnung; ihr Integral enthält zwei willkürliche Constanten. Man kann beweisen, dass eine geodätische Linie vollkommen bestimmt ist durch einen ihrer Punkte und die Richtung in ihm, dagegen im allgemeinen nicht vollkommen bestimmt durch zwei ihrer Punkte, auch wenn dieselben noch so nahe beisammen liegen. Wir geben in § 16 die Integration der Gleichung (4) für eine besondere Art von Flächen, zu denen u. a. die Flächen zweiter Ordnung und die Rotationsflächen gehören.

Man kann ferner durch die Vergleichung mit (3) zeigen, dass die geodätische Linie auch definirt werden kann:

innerhalb gewisser Grenzen als kürzeste Linie zwischen zwei Punkten, oder auch als Ort eines auf der Fläche beweglichen Punktes, auf den keine Kräfte wirken, oder endlich als die Curve, die ein auf der Fläche gespannter Faden annimmt, auf den keine Kräfte wirken[1]).

Die geodätischen Linien lassen sich verwenden zur Einführung gewisser Parameter[2]), die auch geodätische Coordinaten heissen. Zieht man auf der Fläche eine beliebige Curve p und von ihren Punkten

1) Monge-Liouville, Applications. p. 401 ff.

2) Gauss, Disq. gen. Art. 15. 16. 19.

aus, normal zu ihr, die geodätischen Linien $\gamma, \gamma_1, \ldots$ und trägt auf den letzteren gleiche Längen ab, so bilden die Endpunkte eine Curve p_1, die eine geodätische Parallele von p heisst. Man überzeugt sich leicht, dass die geodätischen Parallelen $p, p_1, \ldots$ und die geodätischen Linien $\gamma, \gamma_1, \ldots$ sich überall orthogonal durchschneiden; man nennt daher das System dieser beiden Schaaren ein geodätisches Orthogonalsystem. In der That, führt man die beiden Schaaren als Parametercurven ein und bezeichnet die ersten mit $u = \text{const.}$, die zweiten mit $v = \text{const.}$ und versteht insbesondere unter u die Länge der geodätischen Linien, gemessen von der Linie $p\,(u = 0)$ an, so ist in dem Ausdruck für das Linienelement erstens $e = 1$ (weil für $dv = 0$ $ds = du$ werden muss), ferner aber $f = 0$. Denn der Differentialgleichung (4) der geodätischen Linie muss durch $e = 1$ und $dv = 0$ genügt werden; sie reducirt sich aber für diese Werthe auf $du^3 \cdot \frac{\partial f}{\partial u} = 0$. Es muss also $f = V$ d. h. Function von v allein sein oder es muss längs jeder einzelnen geodätischen Linie $\gamma, \gamma_1 \ldots$ $(v = \text{const.})$ f ebenfalls constant sein. Da nun für die Schnittpunkte der Curve p mit den sämmtlichen zu ihr orthogonalen Curven $\gamma, \gamma_1 \ldots$ f den Werth 0 hat, so muss in der ganzen Fläche $f = 0$ sein (q. e. d.).

Die hier definirten Parameter u, v heissen geodätische Coordinaten; in ihnen hat das Linienelement die Form:

$$ds^2 = du^2 + g dv^2, \tag{5}$$

wo g noch Function von (u, v) ist. Hat umgekehrt das Linienelement einer Fläche die Form $ds^2 = e du^2 + g dv^2$ mit der Bedingung, dass e eine Constante oder Function von u allein ist, so erhält man durch die Substitution $e du^2 = du_1^2$ die Form (5), und es stellt alsdann $u_1 = \text{const.}$ ein System von geodätischen Parallelen dar und u_1 selber die Länge der geodätischen Linien $v = \text{const.}$, gemessen von der ersten geodätisch Parallelen $u_1 = 0$.

Lässt man in der obigen Betrachtung die erste geodätisch Parallele $p\,(u = 0)$ zusammenschrumpfen zu einem Punkt P, von dem die geodätischen Linien $v = \text{const.}$ ausgehen, so heissen die geodätisch Parallelen $u = \text{const.}$ „geodätische Kreise“ und (u, v) ein geodätisches Polarsystem vom Mittelpunkt P. In diesem Falle tritt für die Function g in (5) noch die Bedingung hinzu, dass für $u = 0$ auch $g = 0$ wird, weil im Punkt $P\,(u = 0)$ für alle Richtungen $ds = du$ werden muss. Unter der Voraussetzung, dass in einem geodätischen Polarsystem v den Winkel bedeute, den im Punkt P die Linie v mit der Linie $v = 0$ bildet, tritt die weitere Bedingung hinzu, dass für

$u = 0$ $\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u} = 1$ ist. Denn das Bogenelement eines geodätischen Kreises von unendlich kleinem Radius hat jetzt den Werth $ds = u dv$; es muss also für $u = 0$ $\sqrt{g} = u$ oder $\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u} = 1$ werden.

Es sei noch bemerkt, dass die Minimallinien als geodätische Linien angesehen werden können; denn die Schmiegungsebene einer Minimallinie berührt den imaginären Kugelkreis (§ 3); sie ist folglich normal zur Tangente der Curve, geht also durch die Flächennormale. Analytisch ergibt sich dasselbe, da für $e = g = 0$ der Gleichung (4) ebensowohl durch $du = 0$ wie durch $dv = 0$ genügt wird (vgl. auch § 17).

§ 5. Conjugirte Richtungen. Krümmungslinien. Asymptotenlinien.

Conjugirt[1]) heissen zwei von einem Punkt (x, y, z) oder (u, v) ausgehende Linienelemente ds_1 und ds_2 oder Richtungen $(du_1 : dv_1)$ und $(du_2 : dv_2)$ auf der Fläche, wenn die Tangentialebenen in den Endpunkten des einen Linienelementes sich in der Richtung des anderen Elementes schneiden.

Dass diese Beziehung zwischen den beiden Richtungen reciprok ist, ergibt sich unten aus dem Beweis der Gleichung (1).

Conjugirte Liniensysteme auf der Fläche sind solche, die sich allenthalben nach conjugirten Richtungen durchsetzen.

Die Bedingung dafür, dass die beiden Richtungen $du_1 : dv_1$ und $du_2 : dv_2$ conjugirt sind, ist

$$d \cdot du_1 du_2 + d' \cdot (du_1 dv_2 + dv_1 du_2) + d'' \cdot dv_1 dv_2 = 0. \qquad (1)$$

Denn sind X, Y, Z laufende Coordinaten, so ist die Gleichung der Tangentenebene im Anfangspunkt (x, y, z) von ds_1:

$$(X - x)\, a + (Y - y)\, b + (Z - z)\, c = 0$$

und im Endpunkt $(x + dx_1,\ y + dy_1,\ z + dz_1)$ von ds_1:

$$(X - x - dx_1)(a + da_1) + (Y - y - dy_1)(b + db_1) + Z - z - dz_1)(c + dc_1) = 0,$$

wobei

$$dx_1 = \frac{\partial x}{\partial u} du_1 + \frac{\partial x}{\partial v} dv_1 \qquad da_1 = \frac{\partial a}{\partial u} du_1 + \frac{\partial a}{\partial v} dv_1.$$

Für die Punkte (X, Y, Z) der Schnittlinie beider Tangentialebenen hat man also, da $a dx_1 + b dy_1 + c dz_1 = 0$:

$$(X - x)\, da_1 + (Y - y)\, db_1 + (Z - z)\, dc_1 = 0.$$

---

1) Dupin, Développements. p. 44 u. 91.

Die Bedingung dafür, dass auf dieser Linie der Endpunkt $(x + dx_2, y + dy_2, z + dz_2)$ von ds_2 liege, ist:

$$da_1 dx_2 + db_1 dy_2 + dc_1 dz_2 = 0.$$

Diese Gleichung ist aber nach (3) § 2 identisch mit (1).

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Parametercurven $u = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$ selber conjugirte Linien sind, ist:

$$\mathfrak{d}' = 0. \tag{2}$$

Denn soll (1) genügt werden durch $(du_1 = du;\ dv_1 = 0)$ und $(du_2 = 0,\ dv_2 = dv)$, so muss $\mathfrak{d}' = 0$ sein, und umgekehrt, ist $\mathfrak{d}' = 0$, so genügen diese Differentiale der Gleichung (1).

Der Winkel V zwischen einer Richtung $du_1 : dv_1$ und der ihr conjugirten Richtung $du_2 : dv_2$ ist nach (9) § 1 bestimmt durch:

$$ds_1 ds_2 \cos V = e du_1 du_2 + f(du_1 dv_2 + dv_1 du_2) + g dv_1 dv_2$$

oder wenn man nach (1) die Werthe

$$du_2 = \lambda(\mathfrak{d}' du_1 + \mathfrak{d}'' dv_1) \qquad dv_2 = -\lambda(\mathfrak{d} du_1 + \mathfrak{d}' dv_1)$$

(wo λ ein Proportionalitätsfactor) einträgt, durch:

$$ds_1 ds_2 \cos V = \lambda \cdot [du_1^2(e\mathfrak{d}' - f\mathfrak{d}) + du_1 dv_1(e\mathfrak{d}'' - g\mathfrak{d}) + dv_1^2(f\mathfrak{d}'' - g\mathfrak{d}')]. \tag{3}$$

Krümmungslinien[1]) der Fläche heissen diejenigen Curvensysteme, die zugleich conjugirt und orthogonal sind.

Die Differentialgleichung der Krümmungslinien ist nach (3) $\cos V = 0$ oder wenn man (u, v) für (u_1, v_1) schreibt:

$$(e\mathfrak{d}' - f\mathfrak{d})\, du^2 + (e\mathfrak{d}'' - g\mathfrak{d})\, du dv + (f\mathfrak{d}'' - g\mathfrak{d}')\, dv^2 = 0$$

oder

$$\begin{vmatrix} edu + fdv & \mathfrak{d} du + \mathfrak{d}' dv \\ fdu + gdv & \mathfrak{d}' du + \mathfrak{d}'' dv \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Es gibt also zwei Schaaren von Krümmungslinien auf der Fläche.

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die Parametercurven (u, v) selber Krümmungslinien werden, sind nach (2) und (10) § 1 oder auch nach (4):

$$f = 0 \qquad \mathfrak{d}' = 0. \tag{5}$$

Eine andere Definition der Krümmungslinien gibt zu weiteren Betrachtungen Anlass.

Krümmungslinien sind auch diejenigen Curven, längs deren die consecutiven Flächennormalen sich schneiden.

---

1) Monge-Liouville, Applications. p. 124 ff.; Dupin, Développements. p. 47 u. 94.

Denn sollen die Normalen in den Punkten (u, v) und $(u + du, v + dv)$ einander schneiden, so hat man, wenn ξ, η, ζ die Coordinaten des Schnittpunktes und wenn r seinen Abstand vom Punkte (u, v) oder (x, y, z) bezeichnet, die Bedingung:

$$\xi = x + ra = (x + dx) + (r + dr)(a + da)$$

oder

$$dx + adr + rda = 0 \tag{6}$$

nebst den entsprechenden Gleichungen in (y, b) und (z, c). Durch Elimination von r und dr folgt

$$\begin{vmatrix} a & da & dx \end{vmatrix} = 0. \tag{7}$$

Diese Gleichung lässt sich leicht auf die Form (4) bringen entweder, indem man die linke Seite mit der Determinante (24) § 1 multiplicirt oder auf folgende Weise. Multiplicirt man (6) mit a und addirt die entsprechenden Gleichungen in (y, b) und (z, c), so folgt wegen $\sum adx = 0$ und $\sum a^2 = 1$ für die Richtung der betrachteten Linien:

$$dx + rda = 0 \qquad dy + rdb = 0 \qquad dz + rdc = 0. \tag{8}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen bez. mit $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}$, dann mit $\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}$ und addirt jedesmal, so erhält man nach (4) § 1 und (3) § 2:

$$edu + fdv = r(\mathfrak{d}du + \mathfrak{d}'dv) \qquad fdu + gdv = r(\mathfrak{d}'du + \mathfrak{d}''dv). \tag{9}$$

Eliminirt man hieraus r, so ergibt sich die Gleichung (4), womit die Identität der oben definirten Linien mit den Krümmungslinien erwiesen ist. Die Gleichungen (8) geben eine dritte Definition der Krümmungslinien, nämlich (vgl. § 11):

Krümmungslinien sind auch diejenigen Curven, deren Richtung in jedem Punkt der Richtung des sphärischen Bildes parallel ist.

Eliminirt man andrerseits aus (9) $du : dv$, so erhält man eine quadratische Gleichung in r, nämlich:

$$\begin{vmatrix} r\mathfrak{d} - e & r\mathfrak{d}' - f \\ r\mathfrak{d}' - f & r\mathfrak{d}'' - g \end{vmatrix} = 0 \tag{10}$$

oder

$$r^2(\mathfrak{d}\mathfrak{d}'' - \mathfrak{d}'^2) - r(e\mathfrak{d}'' - 2f\mathfrak{d}' + g\mathfrak{d}) + (eg - f^2) = 0.^1)$$

Die zwei Wurzeln r_1 und r_2 dieser Gleichung heissen die Hauptkrümmungsradien der Fläche im Punkt (u, v); sie sind die Krümmungsradien derjenigen ebenen Normalschnitte, die im Punkt (u, v)

1) Monge-Liouville, Applications. p. 129.

die eine und die andere Krümmungslinie berühren. Die zu r_1 und r_2 gehörigen Fortschrittsrichtungen ergeben sich eindeutig aus den Gleichungen (9).

Aus (10) erhält man die schon früher (§ 2) abkürzend benutzten Werthe für das Krümmungsmaass k und für die mittlere Krümmung h der Fläche im Punkt (u, v):

$$(11)\qquad \begin{aligned} k &= \frac{1}{r_1 r_2} = \frac{dd'' - d'^2}{eg - f^2} \\ h &= \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{ed'' - 2fd' + gd}{eg - f^2}. \end{aligned}$$

Die Krümmungslinien und ebenso die Hauptkrümmungsradien sind für reelle Flächen stets reell; denn die Discriminante von (4) in Bezug auf $du : dv$ ist mit der Discriminante von (10) in Bezug auf r identisch und positiv; sis lässt sich nämlich leicht auf die Form bringen:

$$(12)\qquad \begin{aligned} &\delta^4 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)^2 = (ed'' - gd)^2 - 4(ed' - fd)(fd'' - gd') \\ &= \left[(ed'' - gd) - \frac{2f}{e}(ed' - fd)\right]^2 + \frac{4}{e^2}(eg - f^2)(ed' - fd)^2. \end{aligned}$$

Asymptotenrichtung heisst eine Richtung auf der Fläche, die mit der zugehörigen conjugirten Richtung zusammenfällt; Asymptotenlinien heissen die von den Asymptotenrichtungen gebildeten Curven[1]).

Als Differentialgleichung der Asymptotenlinien erhält man aus (1), indem man $du_1 : dv_1 = du_2 : dv_2 = du : dv$ setzt

$$(13)\qquad d\,du^2 + 2d'\,du\,dv + d''\,dv^2 = 0.$$

Hiernach gehen durch jeden Punkt der Fläche zwei Asymptotenlinien. Nach (1) und (13) sind umgekehrt conjugirte Richtungen solche, die harmonisch zu den Asymptotenlinien liegen.

Betrachtet man die linke Seite von (13) und den Ausdruck für ds^2 (3) § 1 als binäre Formen in du, dv, so sind die Zähler und Nenner von h und k (11) die simultanen Invarianten, die linke Seite von (4) die simultane Covariante derselben.

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die Parametercurven u, v selber Asymptotenlinien werden, sind nach (13):

$$(14)\qquad d = 0 \qquad d'' = 0.$$

Um den Winkel W zwischen den beiden Asymptotenrichtungen zu bestimmen, seien $du' : dv'$ und $du'' : dv''$ die Wurzeln der Gleichung

1) Dupin, Développements. p. 51.

(13), ferner ds' und ds'' die Elemente der Asymptotenlinien und μ ein Proportionalitätsfactor. Dann folgt aus (13):

$$du'du'' = \mu d'' \qquad dv'dv'' = \mu d \qquad du'dv'' + dv'du'' = -\mu \cdot 2d'.$$

Daher ist wegen (11) und (12):

$$edu'du'' + f(du'dv'' + dv'du'') + gdv'dv''$$
$$= \mu(ed'' - 2fd' + gd) = \mu\delta^2\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right),$$

$$ds'ds'' = \mu[(ed'' - 2fd' + gd)^2 - 4(eg - f^2)(dd'' - d'^2)]^{\frac{1}{2}} = \mu\delta^2\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

und folglich nach (8) § 1:

$$\cos W = \frac{r_1 + r_2}{r_1 - r_2}. \qquad (15)$$

Der Winkel der Asymptotenlinien ist daher nur abhängig von dem Verhältniss der beiden Hauptkrümmungsradien[1]).

Die Curve auf der Fläche, längs der die Asymptotenlinien sich rechtwinklig durchschneiden, ist:

$$r_1 + r_2 = 0 \quad \text{oder} \quad ed'' - 2fd' + gd = 0. \qquad (16)$$

Die Asymptotenlinien lassen sich noch in anderer Weise definiren. Die Gleichung (13) ist nach (4) § 2 identisch mit

$$dadx + dbdy + dcdz = 0. \qquad (17)$$

d. h. (vgl. § 11): die Asymptotenlinien sind auch diejenigen Curven auf der Fläche, deren Richtung in jedem Punkt zu der Richtung des sphärischen Bildes normal ist.

Die Gleichung (13) ist ferner nach (4) § 2 identisch mit

$$ad^2x + bd^2y + cd^2z = 0. \qquad (18)$$

Dies ist aber die Bedingung dafür, dass die Tangentialebene der Fläche im Punkt (x, y, z) noch den Punkt $x + 2dx + d^2x$, $y + 2dy + d^2y$, $z + 2dz + d^2z$) enthalte; daher:

Die Asymptotenlinien sind auch diejenigen Curven, deren Schmiegungsebene in jedem Punkt mit der Tangentialebene der Fläche zusammenfällt.

Dasselbe Resultat gibt in anderer Weise der Satz:

Die Schnittcurve einer Tangentialebene der Fläche hat im Berührungspunkt einen Doppelpunkt; die beiden Tangenten des Doppelpunkts osculiren die Fläche; sie geben die Richtung der Asymptotenlinien an.

Denn ist (x, y, z) ein bestimmter Punkt der Fläche mit den

1) Dupin, Développements. p. 189.

festen Parametern (u, v), so hat die Schnittcurve der Tangentialebene dieses Punktes mit der Fläche die Gleichung

$$a(X-x)+b(Y-y)+c(Z-z)=0, \tag{19}$$

wenn man die Grössen x, y, z; a, b, c in den festen Parametern (u, v), die Grössen X, Y, Z in variabelen Parametern (U, V) ausdrückt. Die Gleichung (19) und ebenso die aus ihr durch Differenziren nach U und V hervorgehenden Gleichungen:

$$a\frac{\partial X}{\partial U}+b\frac{\partial Y}{\partial U}+c\frac{\partial Z}{\partial U}=0 \qquad a\frac{\partial X}{\partial V}+b\frac{\partial Y}{\partial V}+c\frac{\partial Z}{\partial V}=0$$

werden befriedigt, wenn man U, V mit u, v und X, Y, Z mit x, y, z zusammenfallen lässt, d. h. die Schnittcurve (19) hat im Punkt (u, v) einen Doppelpunkt. Um die Richtungen $du : dv$ der Tangenten in (u, v) zu finden, hat man die Entwicklung

$$X=x+\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv+\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}du^2+2\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}dudv+\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}dv^2+\cdots \tag{20}$$

nebst den entsprechenden Entwicklungen für Y und Z in (19) einzutragen. Man erhält dann für die Richtungen $du : dv$ der Tangenten im Doppelpunkt gerade die Gleichung (13), welche die Richtungen der Asymptotenlinien angibt (q. e. d.).

Dass die Asymptotenlinien auch die Curven sind, für welche jede sie berührende (aber von der Schnittcurve der Tangentenebene verschiedene) ebene Schnittcurve im Berührungspunkt eine Wendetangente hat, zeigt sich in § 15.

Man unterscheidet auf der Fläche[1]), je nachdem

$$\begin{aligned} k \text{ oder } dd'' - d'^2 &> 0 \text{ das Gebiet der elliptischen Punkte,} \\ \text{„ „ „ } &< 0 \text{ „ „ „ hyperbolischen Punkte,} \\ \text{„ „ „ } &= 0 \text{ die Curve der parabolischen Punkte.} \end{aligned} \tag{21}$$

Die letztere Curve trennt die Gebiete der elliptischen und hyperbolischen Punkte. In den elliptischen Punkten sind die Hauptkrümmungsradien gleichgerichtet und die Asymptotenlinien imaginär; die Fläche ist convex-convex. In den hyperbolischen Punkten sind die Hauptkrümmungsradien entgegengesetzt gerichtet und die Asymptotenlinien reell; die Fläche ist convex-concav. In einem parabolischen Punkt ist ein Hauptkrümmungsradius unendlich, die Asymptotenlinien fallen zusammen. Im Allgemeinen ist die Curve der parabolischen Punkte der Ort der Spitzen, in singulären Fällen auch

1) Dupin, Développements. p. 49 u. 154.

ganz oder theilweise die Einhüllende der Asymptotenlinien. Man verfolgt diese Verhältnisse leicht an dem Beispiel der Rotationsflächen.

Die Bezeichungen (21) haben ihren Ursprung in einer Betrachtung, die sich an die obige Bemerkung über die Asymptotenlinien anschliesst.

Um die Fläche in der Umgebung eines Punktes zu untersuchen, denkt man sich die Schnittcurve der Fläche mit einer der Tangentialebene des Punktes parallelen und unendlich nahen Ebene und ersetzt diese Schnittcurve durch die sog. Indicatrix[1]), d. i. die einfachste Curve, die sich in der Nähe des Punktes der Schnittcurve möglichst eng anschliesst.

Um die Gleichung der Indicatrix in der einfachsten Form zu erhalten, seien u, v die Parameter der Krümmungslinien, also nach (5) und (11):

$$f = 0 \qquad d' = 0 \qquad \frac{1}{r_1} = \frac{d}{e} \qquad \frac{1}{r_2} = \frac{d'}{g}. \tag{22}$$

Eine zur Tangentialebene (19) parallele Ebene im Abstand ε hat die Gleichung:

$$a(X - x - \varepsilon a) + b(Y - y - \varepsilon b) + c(Z - z - \varepsilon c) = 0$$

oder

$$a(X - x) + b(Y - y) + c(Z - z) = \varepsilon.$$

Trägt man hier die Werthe (20) ein, so erhält man

$$d du^2 + 2d' du dv + d'' dv^2 = \varepsilon$$

oder wenn man die Bogenelemente der Parametercurven $\sqrt{e}du = \xi$ und $\sqrt{g}dv = \eta$ setzt und die Gleichungen (22) benutzt, als Gleichung der Indicatrix:

$$\frac{\xi^2}{r_1} + \frac{\eta^2}{r_2} = \varepsilon, \tag{23}$$

wo ε als unendlich klein vorausgesetzt ist. Hiernach besteht die Indicatrix in einem elliptischen Punkte ($k > 0$) aus einer Ellipse, in einem hyperbolischen Punkte ($k < 0$) aus einer Hyperbel, in einem parabolischen Punkte ($r_2 = \infty$) aus einem Paar von parallelen, unendlich nahen Geraden.

Ferner entsprechen conjugirte Richtungen in einem Punkte der Fläche conjugirten Durchmessern, die Asymptotenrichtungen des Punktes den Asymptoten, die Richtungen der Krümmungslinien den Hauptaxen der Indicatrix, sodass die Richtungen der Krümmungslinien auch diejenigen Richtungen sind, für welche die normalen Krümmungen des Punktes zum Maximum oder Minimum werden (vgl. § 15).

Ist insbesondere für einen Punkt $r_1 = r_2$, also die Indicatrix ein

1) Dupin, Dévoloppements. p. 48 u. 147.

Kreis, so heisst der Punkt ein Kreispunkt[1]) (Nabelpunkt); für ihn ist also nach (12)

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_2} = \frac{d}{e} = \frac{d'}{f} = \frac{d''}{g}. \tag{24}$$

Man sieht leicht, dass durch einen Kreispunkt im Allgemeinen nicht unendlich viele, sondern nur drei Krümmungslinien hindurch gehen[2]). Es sei $A = \text{const.}$ die endliche Gleichung der beiden Schaaren von Krümmungslinien, aufgelöst nach der Constanten. Setzt man in ihr $u + du$ und $v + dv$ für u und v und entwickelt nach Potenzen von du und dv, so erhält man, indem man bis zu den Gliedern zweiter Ordnung vorschreitet, die Differentialgleichung der Krümmungslinien in der Form:

$$P du^2 + Q du\, dv + R dv^2 = 0,$$

wo die linke Seite bis auf einen Factor mit (4) übereinstimmt.

In einem Kreispunkt, wo nach (24) $P = Q = R = 0$ ist, hat man bis zu den Gliedern dritter Ordnung vorzugehen; man erhält so, wenn zur Abkürzung $\frac{\partial P}{\partial u} = P_1$, $\frac{\partial P}{\partial v} = P_2$ u. s. w. gesetzt wird, die Gleichung

$$(P_1 du + P_2 dv)\, du^2 + (Q_1 du + Q_2 dv)\, du\, dv + (R_1 du + R_2 dv)\, dv^2 = 0,$$

welche drei Werthe für das Verhältniss $du : dv$ liefert.

Ist $d = d' = d'' = 0$, so hat man einen Kreispunkt mit unendlich grossem Radius. Durch Fortsetzung der Entwicklungen (20) findet man jetzt für die Indicatrix eine Curve dritter Ordnung und die Schnittcurve der Tangentialebene erhält einen dreifachen Punkt, dessen drei Tangenten den drei Asymptoten der Indicatrix parallel sind und die Asymptotenrichtungen der Fläche in dem Punkt angeben.

Die Untersuchungen der §§ 3—5 lassen sich verwenden, um die in § 1 und 2 für allgemeine Parameter entwickelten Formeln zu vereinfachen; so hat man zu setzen:

(25)

$f = 0$	, wenn die Parametercurven	orthogonal sind,
$d' = 0$	, „ „	„ conjugirt sind,
$e = 0,\ g = 0,$	„ „	„ Minimallinien sind,
$e = g,\ f = 0,$	„ „	„ isometrische Linien sind,
$d = 0,\ d'' = 0,$	„ „	„ Asymptotenlinien sind,
$f = 0,\ d' = 0,$	„ „	„ Krümmungslinien sind,
$e = 1,\ f = 0,$	„ „	„ ein geodätisches Orthogonalsystem

1) Dupin, Développements. p. 126.
2) Dupin, l. c. p. 164.

bilden und u die Bogenlänge der geodätischen Linien, gemessen von einer der geodätisch Parallellen $v = \text{const.}$

Wir schliessen hier noch folgende Bemerkung[1]) an, bei der eine Fläche als biegsam betrachtet wird, ohne dehnbar zu sein. Eine Fläche heisst eine Biegungsfläche einer anderen oder auf einer anderen abwickelbar, wenn sie aus ihr durch Verbiegung erhalten werden kann. Zwei verschiedene Flächen mögen Punkt für Punkt auf einander bezogen sein dadurch, dass ihre Punkte (x, y, z) und (x', y', z') als Functionen desselben Parameterpaares (u, v) gegeben sind in der Form:

$$\begin{aligned} x &= x(u, v) \qquad y = y(u, v) \qquad z = z(u, v), \\ x' &= x'(u, v) \qquad y' = y'(u, v) \qquad z' = z'(u, v). \end{aligned} \tag{26}$$

Sollen die beiden Flächen auf einander abwickelbar sein, so ist offenbar nothwendige und hinreichende Bedingung, dass die Linienelemente ds und ds' oder die Ausdrücke

$ds^2 = edu^2 + 2fdudv + gdv^2$ und $ds'^2 = e'du^2 + 2f'dudv + g'dv^2$

für jede Richtung einander gleich sind oder dass

$$e = e' \qquad f = f' \qquad g = g' \tag{27}$$

ist. Hieraus folgt, dass alle von e, f, g allein abhängigen Gleichungen oder Grössen bei der Verbiegung ungeändert bleiben.

Dies gilt z. B., wie auch geometrisch klar ist, von dem Winkel zweier Flächencurven (8) § 1 und der Differentialgleichung der kürzesten Linien (4) § 4, also auch diesen selber. Es zeigt sich später (§ 7), dass für zwei auf einander abwickelbare Flächen in entsprechenden Punkten auch das Krümmungsmaass k und (§ 15) die geodätische Krümmung entsprechender Flächencurven denselben Werth hat.

Auf die Kriterien für die Abwickelbarkeit zweier gegebenen Flächen kommen wir später, in § 18, zu sprechen.

§ 6. Anwendung auf die Centraflächen.

Die bisherigen Entwicklungen sollen zu einer kurzen Untersuchung der Centraflächen verwandt werden. Jedem Punkt (u, v) einer gegebenen Fläche C entsprechen zwei auf der Normale gelegene Hauptkrümmungscentra. Die Centrafläche von C, d. h. der Ort aller Hauptkrümmungscentra von C, hat daher zwei Mäntel, die entsprechend den Radien r_1 und r_2 mit C_1 und C_2 bezeichnet seien. Eine Normale

1) Gauss, Disq. gen. Art. 12 u. 13.

von C berührt C_1 und C_2 in den zugehörigen Krümmungsmittelpunkten. Die Normalen von C längs einer Krümmungslinie bilden eine abwickelbare Fläche A, deren Rückkehrkante der Ort der zugehörigen Krümmungscentra ist. Die beiden Mäntel C_1 und C_2 sind daher auch der Ort der Rückkehrkanten der zu den beiden Systemen von Krümmungslinien gehörigen abwickelbaren Flächen A.[1])

Zur analytischen Untersuchung wähle man auf C als Parametercurven die Krümmungslinien. Dann gelten nach § 5 und nach (6) § 2 die Formeln

$$(1) \qquad f = 0 \qquad d' = 0 \qquad ds^2 = e du^2 + g dv^2,$$

$$(2) \qquad \frac{1}{r_1} = \frac{d}{e} \qquad \frac{1}{r_2} = \frac{d''}{g},$$

$$(3) \qquad \frac{\partial a}{\partial u} = -\frac{1}{r_1}\frac{\partial x}{\partial u} \qquad \frac{\partial a}{\partial v} = -\frac{1}{r_2}\frac{\partial x}{\partial v}.$$

Mit Hilfe derselben erhält man für den Mantel C_1, wenn die auf ihn bezüglichen Grössen durch den unteren Index 1 unterschieden werden und wenn zur Abkürzung gesetzt wird (vgl. § 11):

$$(4) \qquad \frac{\sqrt{e}}{r_1} = \sqrt{E} \qquad \frac{\sqrt{g}}{r_2} = \sqrt{G},$$

durch eine leichte Rechnung die folgenden Formeln:

$$(5) \qquad x_1 = x + r_1 a \qquad y_1 = y + r_1 b \qquad z_1 = z + r_1 c,$$

$$(6) \qquad a_1 = -\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial x}{\partial u} \qquad b_1 = -\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial y}{\partial u} \qquad c_1 = -\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial z}{\partial u},$$

$$(7) \qquad e_1 = \left(\frac{\partial r_1}{\partial u}\right)^2 \qquad f_1 = \frac{\partial r_1}{\partial u}\frac{\partial r_1}{\partial v} \qquad g_1 = \left(\frac{\partial r_1}{\partial v}\right)^2 + G(r_2 - r_1)^2,$$

$$(8) \qquad d_1 = \sqrt{E}\frac{\partial r_1}{\partial u} \qquad d_1' = 0 \qquad d_1'' = -\frac{G}{\sqrt{E}}\frac{\partial r_2}{\partial u},$$

$$(9) \qquad ds_1^2 = dr_1^2 + G(r_2 - r_1)^2 dv^2 \qquad \delta_1^2 = G(r_2 - r_1)^2\left(\frac{\partial r_1}{\partial u}\right)^2,$$

$$(10) \qquad d_1 d_1'' - d_1'^2 = -G\frac{\partial r_1}{\partial u}\frac{\partial r_2}{\partial u} \qquad k_1 = -\frac{1}{(r_2 - r_1)^2}\frac{\frac{\partial r_2}{\partial u}}{\frac{\partial r_1}{\partial u}}.$$

Hieraus ergeben sich die entsprechenden Formeln für den Mantel C_2, wenn man u mit v vertauscht und für

$$(11) \qquad x_1 y_1 z_1 \;\; a_1 b_1 c_1 \;\; e_1 f_1 g_1 \;\; d_1 d_1' d_1'' \;\; r_1 r_2 \;\; s_1 s_2 \;\; e \;\; g \;\; E \;\; G$$

setzt:

$$(12) \qquad x_2 y_2 z_2 \;\; a_2 b_2 c_2 \;\; g_2 f_2 e_2 \;\; d_2'' d_2' d_2 \;\; r_2 r_1 \;\; s_2 s_1 \;\; g \;\; e \;\; G \;\; E.$$

1) Monge-Liouville, Applications. p. 135ff.

Aus diesen Gleichungen ergeben sich folgende Sätze:

Aus (6): Die Normale der Fläche C_1 ist parallel der zugehörigen Krümmungslinie in dem entsprechenden Punkt auf C. Die Normalen von C_1 und C_2 in entsprechenden Punkten sind daher zu einander normal.

Aus (8): Die Curvensysteme auf C_1 (oder auf C_2), die den beiden Schaaren von Krümmungslinien auf C entsprechen, sind conjugirt.

Aus (9): Auf C_1 sind die Curven $r_1 = \text{const.}$ (die den Linien von constantem Radius r_1 auf C entsprechen) geodätisch Parallele und die Curven $v = \text{const.}$ (die der einen Schaar von Krümmungslinien auf C entsprechen) die zugehörigen orthogonalen Geodätischen; zugleich ist r_1 die Bogenlänge dieser Geodätischen, gemessen von einer geodätisch Parallelen.

Ist speciell $r_1 = U$, d. h. Function von u allein, so ist $f_1 = 0$, $d_1' = 0$, d. h. die Krümmungslinien von C_1 entsprechen den Krümmungslinien von C selber.

Ist speciell $r_1 = V$, d. h. Function von v allein, so ist

$$e_1 = f_1 = d_1 = d_1' = 0; \quad k_1 = \infty; \quad ds_1^2 = g_1 dv^2,$$

d. h. die Fläche C_1 wird zur Curve. Die Fläche C ist alsdann eine allgemeine Kanalfläche, d. h. die Enveloppe einer Kugel mit variablem Radius, deren Mittelpunkt eine beliebige Raumcurve beschreibt[1]).

Von besonderem Interesse ist die Centrafläche einer Fläche C, deren Krümmungsradien r_1 und r_2 durch eine Gleichung $F(r_1, r_2) = 0$ verbunden sind[2]), für die also

$$\frac{\partial r_1}{\partial u}\frac{\partial r_2}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial v}\frac{\partial r_2}{\partial u} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial k}{\partial v} - \frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial k}{\partial u} = 0. \tag{13}$$

Für diese Flächen besteht nach (10) wegen (13) zwischen den Krümmungsradien r_1, r_2 von C und den Krümmungsmaassen k_1 und k_2 von C_1 und C_2 die Relation:

$$k_1 k_2 (r_1 - r_2)^4 = 1.^3) \tag{14}$$

Die Werthe k_1 und k_2 haben hiernach gleiches Vorzeichen oder die Asymptotenlinien auf C_1 und C_2 sind gleichzeitig reell oder imaginär.

Ferner sind nach (8) die Gleichungen der Asymptotenlinien auf C_1 und C_2

$$E\frac{\partial r_1}{\partial u}du^2 - G\frac{\partial r_2}{\partial u}dv^2 = 0 \qquad E\frac{\partial r_1}{\partial v}du^2 - G\frac{\partial r_2}{\partial v}dv^2 = 0.$$

---

1) Monge-Liouville, Applications. p. 238.

2) Weingarten, Journ. für Math. Bd. 59. p. 382 (1861).

3) Halphen, Bull. d. l. soc. math. de Paris. IV. p. 94 (1876).

Diese Gleichungen sind aber unter der Voraussetzung (13) identisch. Daher[1]):

Für die durch (13) charakterisirten Flächen sind die Asymptotenlinien auf C_1 und auf C_2 entsprechende Linien.

Um eine dritte Eigenschaft solcher Flächen herzuleiten[2]), entnehmen wir dem § 9 die Formeln:

$$(15) \qquad \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} = \frac{1}{r_2 - r_1} \frac{\partial r_1}{\partial v} \qquad \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} = \frac{1}{r_1 - r_2} \frac{\partial r_2}{\partial u}.$$

Trägt man r_2 als Function von r_1 und umgekehrt ein, so erhält man durch Integration

$$E = \varepsilon\, e^{2\int \frac{dr_1}{r_2 - r_1}} \qquad G = \gamma\, e^{2\int \frac{dr_2}{r_1 - r_2}},$$

wo ε Function von u, γ Function von v allein ist. Durch passende Wahl der Parameter u und v können ε und γ constant und beide $= 1$ gemacht werden[3]). Unter dieser Voraussetzung sind also die Grössen E und G und ebenso nach (4) die Grössen e, g Functionen eines der beiden Radien r_1 oder r_2 allein. Die Gleichung (9) geht hiernach über in

$$(16) \qquad ds_1^2 = dr_1^2 + \Phi(r_1)\, dv^2,$$

wo $\Phi(r_1)$ eine bestimmte Function von r_1 ist, die von der zu Grunde liegenden Gleichung $F(r_1, r_2) = 0$ abhängt. Zu jeder solchen Gleichung existiren noch unendlich viele Flächen C; für alle diese Flächen aber ist nach (16) das Linienelement des Centramantels C_1 dasselbe. Daher der Satz:

Die sämmtlichen Centramäntel C_1, die den verschiedenen, durch dieselbe Relation $F(r_1, r_2) = 0$ charakterisirten Flächen zugehören, sind auf einander abwickelbar. Dasselbe gilt von den Mänteln C_2.

Die Form (16) des Linienelementes von C_1 ist aber zugleich die des Linienelementes einer Rotationsfläche, bezogen auf Meridian- und Parallelkreise als Parametercurven. Daher folgt weiter der Satz:

Alle Flächen C, für welche die nämliche Relation $F(r_1, r_2) = 0$ gilt, haben die Eigenschaft, dass die zugehörigen Centramäntel C_1 sich auf ein und derselben Rotationsfläche abwickeln lassen, wobei die geodätischen Linien $v = \text{const.}$ von C_1 in die Meridiane und die Curven $r_1 = \text{const.}$ von C_1 in die Parallelkreise der Rotationsfläche übergehen.

---

1) Ribaucour, Comptes rendus. t. 74. p. 1402 (1872).

2) Weingarten, l. c. p. 384.

3) Man kann nämlich u durch eine Function u_0 von u und v durch eine Function v_0 von v ersetzen, wodurch $E = E_0 \left(\frac{\partial u_0}{\partial u}\right)^2$, $G = G_0 \left(\frac{\partial v_0}{\partial v}\right)^2$ wird. (Vgl. § 18.)

Derselbe Satz gilt für C_2. Ist $F(r_1, r_2) = 0$ symmetrisch in r_1 und r_2, so sind C_1 und C_2 auf derselben Rotationsfläche, also auch auf einander abwickelbar.

Um für einen gegebenen Fall, d. h. wenn $F(r_1, r_2) = 0$ gegeben ist, die Rotationsfläche zu ermitteln, auf der C_1 abwickelbar ist, sei die z-Axe des Coordinatensystems die Axe der Rotationsfläche, ϱ der Radius des Parallelkreises im Abstand z von der xy-Ebene und v der Winkel einer beliebigen Meridiancurve mit dem Nullmeridian. Dann hat das Quadrat des Linienelements der Rotationsfläche, wenn die Meridiancurve $z = P$, d. h. gleich einer Function von ϱ und P' die Ableitung von P nach ϱ ist, die Form:

$$ds^2 = (1 + P'^2)\, d\varrho^2 + \varrho^2 dv^2. \tag{17}$$

Die Vergleichung mit (16) gibt

$$dr_1 = \sqrt{1 + P'^2}\, d\varrho \qquad \sqrt{\Phi(r_1)} = \varrho, \tag{18}$$

woraus man durch Elimination von r_1 eine Differentialgleichung zur Bestimmung der Function P erhält.

Der obige Satz von der Abwickelbarkeit von C_1 auf einer Rotationsfläche lässt sich umkehren; man kann nämlich den folgenden Satz beweisen[1]):

Jede Fläche, die auf einer Rotationsfläche abwickelbar ist, kann betrachtet werden als der eine Mantel der Centrafläche einer Fläche C, zwischen deren Hauptkrümmungsradien eine Gleichung $F(r_1, r_2) = 0$ besteht. (Eine Ausnahme bilden nur die auf dem Katenoid abwickelbaren Regelflächen.)

Hiernach ist die Aufgabe, alle Flächen zu finden, für die eine Relation $F(r_1, r_2) = 0$ besteht, identisch mit der Aufgabe, alle Biegungsflächen der Rotationsflächen zu finden.

Zum Schluss dieser Untersuchung beweisen wir den Satz[2]):

Die Krümmungslinien einer Fläche C, die durch eine Gleichung $F(r_1, r_2) = 0$ charakterisirt ist, lassen sich durch blosse Quadratur bestimmen.

Zum Beweis[3]) dient eine Vorbetrachtung. Wählt man wie bisher als Parametercurven (u, v) auf C die Krümmungslinien, so nimmt der Ausdruck

$$M = \frac{1}{\delta} \begin{vmatrix} c\,du + f\,dv & d\,du + d'\,dv \\ f\,du + g\,dv & d'\,du + d''\,dv \end{vmatrix}, \tag{19}$$

1) Weingarten, l. c. p. 387.

2) Lie, Darboux Bull. (2) IV. p. 300—304 (1880).

3) Weingarten, Journ. für Math. Bd. 103. p. 184 (1888).

der, gleich 0 gesetzt, die Differentialgleichung der Krümmungslinien gibt, nach (1) und (2) die Form an

$$M = \sqrt{eg}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) du\,dv = \sqrt{EG}\,(r_1 - r_2)\,du dv = 2\varphi du dv.$$

Aus dem hierdurch definirten Werth von φ soll der Ausdruck

$$\lambda = -\frac{1}{\varphi}\frac{\partial^2 \log \varphi}{\partial u\,\partial v} \tag{20}$$

gebildet werden. Benutzt man hierbei die aus (15) sich ergebenden Werthe

$$\frac{\partial^2 \log \sqrt{E}}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{r_2 - r_1}\frac{\partial^2 r_1}{\partial u\,\partial v} - \frac{1}{(r_2 - r_1)^2}\frac{\partial r_1}{\partial v}\left(\frac{\partial r_2}{\partial u} - \frac{\partial r_1}{\partial u}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \log \sqrt{G}}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{r_1 - r_2}\frac{\partial^2 r_2}{\partial u\,\partial v} - \frac{1}{(r_1 - r_2)^2}\frac{\partial r_2}{\partial u}\left(\frac{\partial r_1}{\partial v} - \frac{\partial r_2}{\partial v}\right),$$

so erhält man für λ die Gleichung:

$$\lambda\sqrt{EG} = 2(r_2 - r_1)^{-3}\left(\frac{\partial r_1}{\partial u}\frac{\partial r_2}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial v}\frac{\partial r_2}{\partial u}\right). \tag{21}$$

Hieraus folgt, dass für eine Fläche C der oben angegebenen Art und nur für eine solche der Werth λ verschwindet, also nach (20) $\varphi = UV$ wird, wo U Function von u, V Function von v allein ist. Durch passende Wahl der Parameter u und v (s. Anmerkung p. 26) kann man $\varphi = \frac{1}{2}$ machen, so dass

$$M = du\,dv \tag{22}$$

wird.

Sei nun eine Fläche C, für die $F(r_1, r_2) = 0$ ist, in beliebigen Parametern (u_0, v_0) gegeben, und sei in diesen Parametern:

$$M = (A_1 du_0 + B_1 dv_0)(A_2 du_0 + B_2 dv_0), \tag{23}$$

wo also A_1, B_1, A_2, B_2 gegebene Functionen von (u_0, v_0) sind, so gibt, da der Ausdruck M (19) einer Transformation der Parameter gegenüber invariant ist (§ 18), die Vergleichung von (22) mit (23), wenn ϱ ein unbestimmter Factor,

$$du = \varrho(A_1 du_0 + B_1 dv_0) \qquad dv = \varrho^{-1}(A_2 du_0 + B_2 dv_0). \tag{24}$$

Die Integrabilitätsbedingungen dieser Ausdrücke, nämlich

$$\frac{\partial(\varrho A_1)}{\partial v_0} = \frac{\partial(\varrho B_1)}{\partial u_0} \qquad \frac{\partial(\varrho^{-1} A_2)}{\partial v_0} = \frac{\partial(\varrho^{-1} B_2)}{\partial u_0}$$

geben die Ableitungen von ϱ nach u_0 und v_0. Hiernach erhält man durch blosse Quadratur ϱ und durch nochmalige Quadratur u, v als Functionen von u_0, v_0 aus (24) (q. e. d.).

II. Herleitung einer Fläche aus gegebenen Eigenschaften.

§ 7. Die Fundamentalgleichungen von Gauss und Mainardi.

Die sechs in § 1 und 2 definirten Functionen e, f, g; d, d', d'' von (u, v) bilden nicht nur für die Untersuchung einer gegebenen Fläche auf ihre charakteristischen Eigenschaften, sondern zugleich für die Herleitung einer Fläche aus gegebenen charakteristischen Eigenschaften die Grundlage. Da eine Fläche schon durch drei Functionen x, y, z von u, v bestimmt ist, so können die sechs Grössen e, f, g; d, d', d'' nicht unabhängig von einander sein. Es zeigt sich, dass sie durch ein System von drei partiellen Differentialgleichungen verbunden sind; man erhält diese Gleichungen, wenn man die Integrabilitätsbedingungen des Systems der Gleichungen (6) und (9) § 2 aufstellt.

Dies System lautet, wenn zur Abkürzung die Bezeichnungen

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial x}{\partial u} = a_1 & \frac{\partial y}{\partial u} = b_1 & \frac{\partial z}{\partial u} = c_1 \\ \frac{\partial x}{\partial v} = a_2 & \frac{\partial y}{\partial v} = b_2 & \frac{\partial z}{\partial v} = c_2 \end{array} \tag{1}$$

eingeführt werden:

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial a}{\partial u} - (\varrho' a_1 + \sigma' a_2) = 0 & \frac{\partial a}{\partial v} - (\varrho'' a_1 + \sigma'' a_2) = 0 \\ \frac{\partial a_1}{\partial u} - (d a + p a_1 + q a_2) = 0 & \frac{\partial a_1}{\partial v} - (d' a + p' a_1 + q' a_2) = 0 \\ \frac{\partial a_2}{\partial u} - (d' a + p' a_1 + q' a_2) = 0 & \frac{\partial a_2}{\partial v} - (d'' a + p'' a_1 + q'' a_2) = 0. \end{array} \tag{2}$$

Setzt man zunächst die beiden aus (2) sich ergebenden Werthe von $\frac{\partial^2 a}{\partial u \partial v}$ einander gleich und drückt hierbei die Werthe von $\frac{\partial a_1}{\partial u}$, $\frac{\partial a_2}{\partial u}$, $\frac{\partial a_1}{\partial v}$, $\frac{\partial a_2}{\partial v}$ wieder durch a, a_1, a_2 aus, so erhält man eine in a, a_1, a_2 lineare homogene Gleichung; fügt man die entsprechenden Gleichungen in b, b_1, b_2 und c, c_1, c_2 hinzu, so hat man drei Gleichungen der Form:

$$Ca + C_1 a_1 + C_2 a_2 = 0 \quad Cb + C_1 b_1 + C_2 b_2 = 0 \quad Cc + C_1 c_1 + C_2 c_2 = 0,$$

mit denselben Coefficienten C, C_1, C_2. Da nun die Determinante $|\, a \;\; a_1 \;\; a_2 \,|$ nach (24) § 1 nicht verschwindet, so folgt:

$$C = 0 \qquad C_1 = 0 \qquad C_2 = 0. \tag{3}$$

Behandelt man ebenso die folgenden Gleichungen (2), d. h. setzt

man die beiden Werthe von $\frac{\partial^2 a_1}{\partial u \partial v}$ einander gleich, so erhält man in derselben Weise drei Gleichungen

$$A = 0 \qquad A_1 = 0 \qquad A_2 = 0 \tag{4}$$

und ebenso gibt die Gleichsetzung der beiden Werthe von $\frac{\partial^2 a_2}{\partial u \partial v}$ drei Gleichungen

$$B = 0 \qquad B_1 = 0 \qquad B_2 = 0. \tag{5}$$

Die neun Gleichungen (3), (4), (5) reduciren sich, wie eine leichte Rechnung ergibt, auf drei Gleichungen. Es ist nämlich C identisch $= 0$; ferner sind A_1, A_2, B_1, B_2 bis auf Factoren einander gleich; endlich verschwindet C_1 und C_2 zugleich mit A und B und umgekehrt. Die Integrabilitätsbedingungen des Systems (2) bestehen also in drei Gleichungen. Die zwei ersten lauten:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathfrak{d}}{\partial v} - \frac{\partial \mathfrak{d}'}{\partial u} = p'\mathfrak{d} + (q' - p)\,\mathfrak{d}' - q\mathfrak{d}'' && (\text{aus } A = 0) \\ &\frac{\partial \mathfrak{d}''}{\partial u} - \frac{\partial \mathfrak{d}'}{\partial v} = q'\mathfrak{d}' + (p' - q'')\,\mathfrak{d}' - p''\mathfrak{d} && (\text{aus } B = 0). \end{aligned} \tag{6}$$

Durch Einführung der Grössen

$$\frac{\mathfrak{d}}{\delta} = t \qquad \frac{\mathfrak{d}'}{\delta} = t' \qquad \frac{\mathfrak{d}''}{\delta} = t'' \tag{7}$$

erhalten sie die Form:

$$\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial v} - \frac{\partial t'}{\partial u} &= 2q't' - qt'' - q''t \\ \frac{\partial t''}{\partial u} - \frac{\partial t'}{\partial v} &= 2p't' - p''t - pt''. \end{aligned} \tag{8}$$

Die Gleichungen (6) ergeben sich auch, indem man die Gleichungen (1) § 2 nach u und v differenzirt und die Gleichungen (6) § 2 sowie (7) § 1 benutzt. Man erhält so:

$$\begin{aligned} A_{30} &= \sum a \frac{\partial^3 x}{\partial u^3} &&= \frac{\partial \mathfrak{d}}{\partial u} + p\mathfrak{d} + q\mathfrak{d}' \\ A_{21} &= \sum a \frac{\partial^3 x}{\partial u^2 \partial v} = \frac{\partial \mathfrak{d}'}{\partial u} + p'\mathfrak{d} + q'\mathfrak{d}' &&= \frac{\partial \mathfrak{d}}{\partial v} + p\mathfrak{d}' + q\mathfrak{d}'' \\ A_{12} &= \sum a \frac{\partial^3 x}{\partial u \partial v^2} = \frac{\partial \mathfrak{d}''}{\partial u} + p''\mathfrak{d} + q''\mathfrak{d}' &&= \frac{\partial \mathfrak{d}'}{\partial v} + p'\mathfrak{d}' + q'\mathfrak{d}'' \\ A_{03} &= \sum a \frac{\partial^3 x}{\partial v^3} &&= \frac{\partial \mathfrak{d}''}{\partial v} + p''\mathfrak{d}' + q''\mathfrak{d}''. \end{aligned} \tag{9}$$

Hiernach lassen sich die Ableitungen von $\mathfrak{d}, \mathfrak{d}', \mathfrak{d}''$ nach u und v ausdrücken durch die vier Summen $A_{30}, A_{21}, A_{12}, A_{03}$ und durch die sechs Grössen e, f, g; $\mathfrak{d}, \mathfrak{d}', \mathfrak{d}''$ und deren Ableitungen nach u, v.

Als dritte Integrabilitätsbedingung erhält man:

$$\begin{aligned}
\frac{dd''-d'^2}{eg-f^2} &= \frac{1}{f}\left(\frac{\partial p'}{\partial u}-\frac{\partial p}{\partial v}+p'q'-p''q\right) && (\text{aus } A_1=0)\\
&= \frac{1}{f}\left(\frac{\partial q'}{\partial v}-\frac{\partial q''}{\partial u}+p'q'-p''q\right) && (\text{aus } B_2=0)\\
&= \frac{1}{e}\left(\frac{\partial q}{\partial v}-\frac{\partial q'}{\partial u}+pq'-p'q+qq''-q'^2\right) && (\text{aus } A_2=0)\\
&= \frac{1}{g}\left(\frac{\partial p''}{\partial u}-\frac{\partial p'}{\partial v}+q''p'-q'p''+pp''-p'^2\right) && (\text{aus } B_1=0).
\end{aligned} \tag{10}$$

Diese Gleichung hat in anderer Herleitung bereits Gauss[1]) aufgestellt; sie enthält den Satz:

Das Krümmungsmaass k der Fläche (vgl. (11) § 5) lässt sich allein in den Coefficienten e, f, g des Linienelementes darstellen, bleibt also bei einer Verbiegung der Fläche ungeändert.

Die Gleichungen (6) bilden eine wesentliche Ergänzung des Gauss'schen Formelsystems; sie sind wohl zuerst, allerdings in anderer Form, von Mainardi[2]) angegeben, werden aber häufig als Gleichungen von Codazzi[3]) bezeichnet. In der einfacheren Form (6) sind sie später mehrfach entwickelt worden[4]). Sie treten übrigens in speciellen Parametern schon vor Mainardi in Lamé's Untersuchungen über dreifach orthogonale Flächensysteme auf (vgl. § 10).

Der Ausdruck (10) für das Krümmungsmaass $k = 1 : r_1 r_2$ lässt sich noch auf andere Formen bringen. Zunächst ergibt sich die einfache Darstellung:

$$\frac{\delta}{r_1 r_2} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\delta q}{e}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\delta q'}{e}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\delta p''}{g}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\delta p'}{g}\right)^{5}). \tag{11}$$

In der That erhält man mit Rücksicht auf (7a) § 1:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\delta q}{e}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\delta q'}{e}\right)=\frac{\delta}{e}\left[\frac{\partial q}{\partial v}-\frac{\partial q'}{\partial u}+qq''-q'^2+qp'-q'p+\frac{1}{e}\left(q'\frac{\partial e}{\partial u}-q\frac{\partial e}{\partial v}\right)\right].$$

Es ist aber:

$$\frac{1}{e}\left(q'\frac{\partial e}{\partial u}-q\frac{\partial e}{\partial v}\right)=\frac{1}{2\delta^2}\left[\left(\frac{\partial e}{\partial v}\right)^2+\frac{\partial e}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial u}-2\frac{\partial e}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial u}\right]=2(q'p-qp'),$$

womit die Gleichung (11) bewiesen ist. Berücksichtigt man (14) § 1, so folgt weiter aus (11):

1) Gauss, Disq. gen. Art. 11 u. 12.

2) Mainardi, Giornale dell' Istituto Lombardo. T. IX. p. 395 (1856). Vgl. die Anmerkung von Knoblauch, Journ. für Math. Bd. 103. S. 31.

3) Codazzi, Ann. di Mat. T. II. p. 273 (1868).

4) Die Gleichungen (9) gibt Knoblauch, l. c. p. 32.

5) Dies gibt ausgerechnet die Formel von Liouville, Journ. de Math. XVI. p. 131 (1851).

$$(12)\quad \frac{\delta}{r_1 r_2} = -\frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\delta q'}{e}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\delta p'}{g}\right) = +\frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\delta p''}{g}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\delta q}{e}\right).$$

Da ferner:

$$\frac{\delta q'}{e} = \frac{1}{\delta e}\left[\frac{e}{2}\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{f}{2}\frac{\partial e}{\partial v}\right] = \frac{1}{\sqrt{e}\sin\omega}\left[\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u} - \cos\omega \frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v}\right]$$

$$\frac{\delta p'}{g} = \frac{1}{\delta g}\left[\frac{g}{2}\frac{\partial e}{\partial v} - \frac{f}{2}\frac{\partial g}{\partial u}\right] = \frac{1}{\sqrt{g}\sin\omega}\left[\frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v} - \cos\omega \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u}\right],$$

so hat man statt (12):

$$(13)\quad \frac{\delta}{r_1 r_2} = -\frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} - \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u} - \cos\omega \frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v}}{\sqrt{e}\sin\omega}\right] - \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v} - \cos\omega \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u}}{\sqrt{g}\sin\omega}\right]^{1}).$$

Von geringerer Bedeutung sind die Formeln für das Krümmungsmaass, die man durch Einführung der geodätischen Krümmung der Parametercurven erhält. Bezeichnet man die geodätische Krümmung von $v = \text{const.}$ und $u = \text{const.}$ bezüglich mit $\frac{1}{\zeta_1}$ und $\frac{1}{\zeta_2}$, so ist (vgl. (13) § 14):

$$\frac{\delta q}{e} = \frac{\sqrt{e}}{\zeta_1} \qquad \frac{\delta p''}{g} = -\frac{\sqrt{g}}{\zeta_2}.$$

Daher folgt aus (12):

$$(14)\quad \frac{\delta}{r_1 r_2} = +\frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{e}}{\zeta_1}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{g}}{\zeta_2}\right)^{2}).$$

Endlich hat man für rechtwinklige Parametercurven:

$$f = 0 \quad \omega = 90^0 \quad \delta = \sqrt{eg} \quad \frac{1}{\zeta_1} = -\frac{1}{\sqrt{eg}}\frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v} \quad \frac{1}{\zeta_2} = +\frac{1}{\sqrt{eg}}\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u}.$$

Daher folgt aus (14):

$$(15)\quad \frac{1}{r_1 r_2} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\zeta_1}\right) - \frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\zeta_2}\right) - \frac{1}{\zeta_1^2} - \frac{1}{\zeta_2^2}.^{3})$$

§ 8. Satz von Bonnet.

Nach § 7 genügen für jede Fläche die sechs fundamentalen Functionen $e, f, g; d, d', d''$ von (u, v) drei partiellen Differentialgleichungen. Es gilt nun umgekehrt der wichtige Satz[4]):

1) Liouville, l. c.

2) Codazzi, Ann. di Mat. T. II. p. 271 Gl. (54) (1868).

3) Bonnet, Journ. Éc. Pol. Cah. 32. p. 53 (1848).

4) Bonnet, Journ. Éc. Pol. Cah. 42. p. 31 ff. (1867), wo der Beweis unter Voraussetzung rechtwinkliger Parametercurven geführt ist. Einen anderen, weniger einfachen Beweis des Bonnet'schen Satzes gibt Herr Lipschitz, Sitzungsberichte d. Berl. Acad. 1883. p. 541 ff.

Eine Fläche ist (bis auf die Lage im Raum und die Spiegelung an einer Ebene) eindeutig bestimmt, wenn sechs Functionen e, f, g; d, d', d'' existiren, die den drei partiellen Differentialgleichungen (6) und (10) § 7 genügen.

Der Beweis beruht auf einer eingehenderen Untersuchung der Integrale des Systems (2) § 7, dessen Integrabilitätsbedingungen in den Gleichungen (6) und (10) § 7 enthalten sind.

Wir bezeichnen zur Abkürzung die linken Seiten der Gleichungen der ersten Verticalreihe in (2) § 7 mit X_{11}, X_{12}, X_{13}; die der zweiten Verticalreihe mit X_{21}, X_{22}, X_{23}.

Bekanntlich gibt es unendlich viele Systeme von Werthen a, a_1, a_2, die den drei Gleichungen $X_{11}=0$, $X_{12}=0$, $X_{13}=0$ genügen, wie auch die Grössen e, f, g; d, d', d'' oder die aus ihnen abgeleiteten $\varrho', \sigma', p, q, p', q'$ beschaffen sind. Seien (x_0, x_1, x_2), (y_0, y_1, y_2), (z_0, z_1, z_2) drei lineare unabhängige Werthsysteme a, a_1, a_2 dieser Art, deren Determinante also nicht verschwindet. Dann ist das allgemeinste Werthsystem, das den Gleichungen (2) § 7 genügt, von der Form:

$$a=\xi_0 x_0+\eta_0 y_0+\zeta_0 z_0 \quad a_1=\xi_0 x_1+\eta_0 y_1+\zeta_0 z_1 \quad a_2=\xi_0 x_2+\eta_0 y_2+\zeta_0 z_2, \tag{1}$$

wo ξ_0, η_0, ζ_0 noch willkürliche Functionen von v sind. Sollen diese Werthe von a, a_1, a_2 auch den drei Gleichungen $X_{21}=0$, $X_{22}=0$, $X_{23}=0$ in (2) § 7 genügen, so hat man zur Bestimmung von ξ_0, η_0, ζ_0 die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
x_0\frac{\partial\xi_0}{\partial v}+y_0\frac{\partial\eta_0}{\partial v}+z_0\frac{\partial\zeta_0}{\partial v} &= -(\xi_0 X_{21}+\eta_0 Y_{21}+\zeta_0 Z_{21})\\
x_1\frac{\partial\xi_0}{\partial v}+y_1\frac{\partial\eta_0}{\partial v}+z_1\frac{\partial\zeta_0}{\partial v} &= -(\xi_0 X_{22}+\eta_0 Y_{22}+\zeta_0 Z_{22})\\
x_2\frac{\partial\xi_0}{\partial v}+y_2\frac{\partial\eta_0}{\partial v}+z_2\frac{\partial\zeta_0}{\partial v} &= -(\xi_0 X_{23}+\eta_0 Y_{23}+\zeta_0 Z_{23}).
\end{aligned} \tag{2}$$

Damit die Lösungen ξ_0, η_0, ζ_0 dieses Systems Functionen von v allein seien, muss das System äquivalent sein mit dem System, das sich aus ihm durch Ableitung nach u ergibt, wobei ξ_0, η_0, ζ_0 und deren Ableitungen nach v als Constante zu betrachten sind, d. h. also äquivalent mit dem System:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_0}{\partial u}\frac{\partial\xi_0}{\partial v}+\frac{\partial y_0}{\partial u}\frac{\partial\eta_0}{\partial v}+\frac{\partial z_0}{\partial u}\frac{\partial\zeta_0}{\partial v} &= -\left(\xi_0\frac{\partial X_{21}}{\partial u}+\eta_0\frac{\partial Y_{21}}{\partial u}+\zeta_0\frac{\partial Z_{21}}{\partial u}\right)\\
\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial\xi_0}{\partial v}+\frac{\partial y_1}{\partial u}\frac{\partial\eta_0}{\partial v}+\frac{\partial z_1}{\partial u}\frac{\partial\zeta_0}{\partial v} &= -\left(\xi_0\frac{\partial X_{22}}{\partial u}+\eta_0\frac{\partial Y_{22}}{\partial u}+\zeta_0\frac{\partial Z_{22}}{\partial u}\right)\\
\frac{\partial x_2}{\partial u}\frac{\partial\xi_0}{\partial v}+\frac{\partial y_2}{\partial u}\frac{\partial\eta_0}{\partial v}+\frac{\partial z_2}{\partial u}\frac{\partial\zeta_0}{\partial v} &= -\left(\xi_0\frac{\partial X_{23}}{\partial u}+\eta_0\frac{\partial Y_{23}}{\partial u}+\zeta_0\frac{\partial Z_{23}}{\partial u}\right).
\end{aligned} \tag{3}$$

Dies ist in der That der Fall. Denn multiplicirt man die zweite und dritte der Gleichungen (2) bez. mit ϱ' und σ' und addirt, so erhält

man mit Hilfe von (2) § 7 und unter Voraussetzung der Gleichungen (6) und (10) § 7 gerade die erste der Gleichungen (3). In derselben Weise und unter denselben Voraussetzungen ergeben sich die zweite und dritte der Gleichungen (3), wenn man die drei Gleichungen (2) bez. mit d, p, q oder mit d', p', q' multiplicirt und addirt.

Hieraus folgt, dass sich unter Voraussetzung der Gleichungen (6) und (10) § 7 unendlich viele Systeme von drei Grössen a, a_1, a_2 bestimmen lassen, die dem ganzen simultanen System (2) § 7 genügen. Versteht man daher nunmehr unter (x_0, x_1, x_2), (y_0, y_1, y_2), (z_0, z_1, z_2) drei lineare unabhängige Werthsysteme a, a_1, a_2 dieser Art, so sind die allgemeinsten Werthsysteme, welche die Gleichungen (2) § 7 und die entsprechend gebildeten Gleichungen in (b, b_1, b_2) und (c, c_1, c_2) befriedigen, von der Form:

$$
\begin{array}{llll}
a = \xi_0 x_0 + \eta_0 y_0 + \zeta_0 z_0 & a_1 = \xi_0 x_1 + \eta_0 y_1 + \zeta_0 z_1 & a_2 = \xi_0 x_2 + \eta_0 y_2 + \zeta_0 z_2 \\
b = \xi_1 x_0 + \eta_1 y_0 + \zeta_1 z_0 & b_1 = \xi_1 x_1 + \eta_1 y_1 + \zeta_1 z_1 & b_2 = \xi_1 x_2 + \eta_1 y_2 + \zeta_1 z_2 \\
c = \xi_2 x_0 + \eta_2 y_0 + \zeta_2 z_0 & c_1 = \xi_2 x_1 + \eta_2 y_1 + \zeta_2 z_1 & c_2 = \xi_2 x_2 + \eta_2 y_2 + \zeta_2 z_2 ,
\end{array} \tag{4}
$$

wo jetzt die neun Coefficienten ξ_0, η_0, ζ_0; ξ_1, η_1, ζ_1; ξ_2, η_2, ζ_2 Constanten, d. h. unabhängig von u, v sind.

Zwischen diesen neun Coefficienten bestehen sechs Gleichungen, wie die folgende Betrachtung zeigt. Für die neun Grössen a, a_1, a_2; b, b_1, b_2; c, c_1, c_2 gelten nach den Gleichungen (19) in Verbindung mit (9) und (22) § 1 die Relationen:

$$
\begin{array}{l}
a^2 + \frac{1}{\delta^2}(g a_1^2 + c a_2^2 - 2 f a_1 a_2) = 1 \\
a b + \frac{1}{\delta^2}[g a_1 b_1 + c a_2 b_2 - f(a_1 b_2 + b_1 a_2)] = 0
\end{array} \tag{5}
$$

nebst zwei anderen Paaren, die hieraus durch cyclische Vertauschung von a, b, c hervorgehen.

Bildet man den linken Seiten in (5) entsprechend die Grössen:

$$
\begin{array}{l}
M_{11} = x_0^2 + \frac{1}{\delta^2}(g x_1^2 + c x_2^2 - 2 f x_1 x_2) \\
M_{12} = x_0 y_0 + \frac{1}{\delta^2}[g x_1 y_1 + c x_2 y_2 - f(x_1 y_2 + y_1 x_2)]
\end{array} \tag{6}
$$

nebst den durch cyclische Vertauschung von x, y, z aus ihnen hervorgehenden Grössen M_{22}, M_{33} und M_{23}, M_{31}, so sind auch diese sechs Grössen M_{ik} constant, d. h. von u und v unabhängig, da ihre partiellen Ableitungen nach u und nach v vermöge der Gleichungen

(2) § 7 verschwinden. Trägt man nun die Werthe (4) in die Gleichungen (5) ein, so erhält man nach (6):

$$M_{11}\xi_i^2 + M_{22}\eta_i^2 + M_{33}\zeta_i^2 + 2M_{23}\eta_i\zeta_i + 2M_{31}\zeta_i\xi_i + 2M_{12}\xi_i\eta_i = 1 \qquad (i = 0;\ 1;\ 2)$$

$$M_{11}\xi_i\xi_k + M_{22}\eta_i\eta_k + M_{33}\zeta_i\zeta_k + M_{23}(\eta_i\zeta_k + \zeta_i\eta_k) + M_{31}(\zeta_i\xi_k + \xi_i\zeta_k) + M_{12}(\xi_i\eta_k + \eta_i\xi_k) = 0 \qquad (i, k = 0, 1;\ 1, 2;\ 2, 3). \tag{7}$$

Diese Gleichungen drücken aus, dass die neun Coefficienten in (4) nämlich $\xi_0, \eta_0, \zeta_0;\ \xi_1, \eta_1, \zeta_1;\ \xi_2, \eta_2, \zeta_2$ die Coordinaten der Endpunkte dreier conjugirter Durchmesser einer festen Fläche zweiter Ordnung

$$M_{11}\xi^2 + M_{22}\eta^2 + M_{33}\zeta^2 + 2M_{23}\eta\zeta + 2M_{31}\zeta\xi + 2M_{12}\xi\eta = 1 \tag{8}$$

sind. Diese Fläche ist eine Mittelpunktsfläche, ihre conjugirten Durchmesser sind alle endlich, da nach (6) die Determinante

$$\begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{\delta^4} \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ z_0 & z_1 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 & x_1 g - x_2 f & x_2 e - x_1 f \\ y_0 & y_1 g - y_2 f & y_2 e - y_1 f \\ z_0 & z_1 g - z_2 f & z_2 e - z_1 f \end{vmatrix} = \frac{1}{\delta^3} \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ z_0 & z_1 & z_2 \end{vmatrix}^2$$

positiv ist.

Hiernach entspricht jedem Tripel conjugirter Durchmesser ein bestimmtes System von neun Constanten in (4). Es ist nur noch zu zeigen, wie die so erhaltenen verschiedenen Lösungen (4) bei veränderter Wahl der conjugirten Durchmesser sich geometrisch zu einander verhalten.

Kehrt man die Richtung eines der drei conjugirten Durchmesser um, so ändern die Coordinaten seines Endpunktes, also z. B. die Constanten ξ_0, η_0, ζ_0 und damit nach (4) auch a, a_1, a_2 oder nach (22) § 1 a, α_1, α_2 ihr Vorzeichen, d. h. die Fläche erfährt eine Spiegelung an der xy-Ebene.

Wählt man dagegen statt des ersten Tripels von conjugirten Durchmessern ξ, η, ζ ein zweites ξ', η', ζ', das mit dem ersten durch die linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} \xi_0' &= \xi_0\lambda_0 + \xi_1\mu_0 + \xi_2\nu_0 & \xi_1' &= \xi_0\lambda_1 + \xi_1\mu_1 + \xi_2\nu_1 & \xi_2' &= \xi_0\lambda_2 + \xi_1\mu_2 + \xi_2\nu_2 \\ \eta_0' &= \eta_0\lambda_0 + \eta_1\mu_0 + \eta_2\nu_0 & \eta_1' &= \eta_0\lambda_1 + \eta_1\mu_1 + \eta_2\nu_1 & \eta_2' &= \eta_0\lambda_2 + \eta_1\mu_2 + \eta_2\nu_2 \\ \zeta_0' &= \zeta_0\lambda_0 + \zeta_1\mu_0 + \zeta_2\nu_0 & \zeta_1' &= \zeta_0\lambda_1 + \zeta_1\mu_1 + \zeta_2\nu_1 & \zeta_2' &= \zeta_0\lambda_2 + \zeta_1\mu_2 + \zeta_2\nu_2 \end{aligned} \tag{9}$$

verbunden ist, so ergibt sich aus den Gleichungen (7), gebildet für das Tripel ξ', η', ζ', dass die Transformationscoefficienten $\lambda_0, \mu_0, \nu_0;\ \lambda_1, \mu_1, \nu_1;\ \lambda_2, \mu_2, \nu_2$ in (9) denselben Bedingungen genügen müssen, wie die Coefficienten einer orthogonalen Substitution.

Durch Einführung von ξ', η', ζ' statt ξ, η, ζ gehen nun die Werthe a, b, c in (4) über in neue Werthe a', b', c', die mit den ursprünglichen durch die Gleichungen verbunden sind

$$
\begin{array}{llll}
a' = a\lambda_0 + b\mu_0 + c\nu_0 & b' = a\lambda_1 + b\mu_1 + c\nu_1 & c' = a\lambda_2 + b\mu_2 + c\nu_2 \\
(10)\quad a_1' = a_1\lambda_0 + b_1\mu_0 + c_1\nu_0 & b_1' = a_1\lambda_1 + b_1\mu_1 + c_1\nu_1 & c_1' = a_1\lambda_2 + b_1\mu_2 + c_1\nu_2 \\
a_2' = a_2\lambda_0 + b_2\mu_0 + c_2\nu_0 & b_2' = a_2\lambda_1 + b_2\mu_1 + c_2\nu_1 & c_2' = a_2\lambda_2 + b_2\mu_2 + c_2\nu_2 .
\end{array}
$$

Die nämlichen Gleichungen (10) aber erhält man, wenn man die Coordinaten eines Punktes (xyz) der Fläche einer orthogonalen Transformation mit denselben Coefficienten λ, μ, ν unterwirft. Daher entspricht der Wahl eines neuen Tripels eine Drehung des Coordinatensystems oder der Fläche um den Ursprung.

Hiermit ist der aufgestellte Satz bewiesen. Dieser Satz enthält eine allgemeine und systematische Methode zur Herleitung der Gleichung einer durch charakteristische Eigenschaften definirten Fläche. Die Aufgabe zerfällt in zwei Theile[1]):

Erstens sind die sechs fundamentalen Grössen e, f, g; d, d', d'' als Functionen von u, v zu vermitteln. Hierzu wähle man ein bestimmtes, der Aufgabe angepasstes System von Parametern u, v, wodurch zwei der sechs Grössen bestimmt oder zwei Relationen zwischen ihnen festgestellt werden; eine dritte Relation gibt die die Fläche charakterisirende Eigenschaft. Hierzu kommen die drei Differentialgleichungen (6) und (10) § 7. Man hat also sechs Gleichungen, die zur Bestimmung der sechs fundamentalen Grössen ausreichen.

Zweitens sind die Punktcoordinaten x, y, z als Functionen von u, v darzustellen. Dies geschieht, indem man das System (2) § 7 in der oben angegebenen Weise durch die Gleichungen (4) integrirt. Gibt man dabei den Constanten ξ, η, ζ beliebige mit (7) verträgliche Werthe, so erhält man aus den Gleichungen (1) § 7:

$$
(11)\quad x = \int (a_1 du + a_2 dv) \qquad y = \int (b_1 du + b_2 dv) \qquad z = \int (c_1 du + c_2 dv),
$$

also x, y, z durch Ausführung von Quadraturen, die noch drei willkürliche additive Constanten einführen. Damit hat man die Gleichung der Fläche für eine bestimmte Lage im Raum.

Wir geben in § 9 eine Herleitung der Gleichung der Minimalfläche nach dieser Methode.

---

1) Bour, Journ. Éc. Pol. Cah. 39. p. 23 (1862).

§ 9. Anwendungen. Differentialgleichung gewisser Flächen.

Zu einigen Anwendungen stellen wir die wichtigsten Formeln von § 7 für besondere Parametercurven kurz zusammen.

1. Die Parametercurven (u, v) seien die Minimallinien. Dann ist nach (11) und (25) § 5 und nach (6) und (10) § 7:

$$e = g = 0 \qquad ds^2 = 2f\,du\,dv$$
$$h = \frac{2d'}{f} \qquad k = -\frac{dd'' - d'^2}{f^2} = -\frac{1}{f}\frac{\partial^2 \log f}{\partial u\,\partial v} \tag{1}$$
$$\frac{1}{d'}\frac{\partial d}{\partial v} = \frac{\partial \log \left(\frac{d'}{f}\right)}{\partial u} \qquad \frac{1}{d'}\frac{\partial d''}{\partial u} = \frac{\partial \log \left(\frac{d'}{f}\right)}{\partial v}.$$

2. Die Parametercurven (u, v) seien isometrische Linien. Dann ist nach (6) und (10) § 7:

$$e = g = \lambda \qquad f = 0 \qquad ds^2 = \lambda(du^2 + dv^2)$$
$$h = \frac{d + d''}{\lambda} \qquad k = \frac{dd'' - d'^2}{\lambda^2} = -\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial v^2}\right) \tag{2}$$
$$\frac{\partial d''}{\partial u} - \frac{\partial d'}{\partial v} = \frac{1}{2}(d + d'')\frac{\partial \log \lambda}{\partial u} \qquad \frac{\partial d}{\partial v} - \frac{\partial d'}{\partial u} = \frac{1}{2}(d + d'')\frac{\partial \log \lambda}{\partial v}.$$

3. Die Parametercurven (u, v) seien die Asymptotenlinien. Dann ist nach (7), (8) und (12) § 7 $t = t'' = 0$ und

$$h = -\frac{2ft'}{\delta} \qquad -\delta k = +\delta t'^2 = \frac{\partial^2 \omega}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\delta q'}{e}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\delta p'}{g}\right)$$
$$\frac{\partial \log t'}{\partial u} = -2q' \qquad \frac{\partial \log t'}{\partial v} = -2p'. \tag{3}$$

4. Die Parameter (u, v) seien geodätische Orthogonalcoordinaten.

Dann ist:

$$e = 1 \qquad f = 0 \qquad ds^2 = du^2 + g\,dv^2$$
$$h = d + \frac{d''}{g} \qquad k = \frac{dd'' - d'^2}{g} = -\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial^2 \sqrt{g}}{\partial u^2}. \tag{4}$$

5. Die Parametercurven (u, v) seien die Krümmungslinien. Dann ist (vgl. § 6):

$$f = 0 \qquad d' = 0 \qquad ds^2 = e\,du^2 + g\,dv^2$$
$$\sqrt{E} = \frac{d}{\sqrt{e}} = \frac{\sqrt{e}}{r_1} \qquad \sqrt{G} = \frac{d''}{\sqrt{g}} = \frac{\sqrt{g}}{r_2} \qquad F = 0^{1}) \tag{5}$$
$$\frac{\partial a}{\partial u} = -\frac{1}{r_1}\frac{\partial x}{\partial u} \qquad \frac{\partial a}{\partial v} = -\frac{1}{r_2}\frac{\partial x}{\partial v}.$$

1) Die Grössen E, F, G sind in § 11 näher definirt.

Ferner lauten die Mainardi-Codazzi'schen Gleichungen (4) § 7:

$$\frac{\partial d}{\partial v} = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{e} - \frac{d''}{f}\right)\frac{\partial e}{\partial v} \qquad \frac{\partial d''}{\partial u} = \frac{1}{2}\left(\frac{d''}{g} - \frac{d}{f}\right)\frac{\partial g}{\partial u}.$$

Dieselben lassen sich, indem man r_1, r_2 für d, d'' einführt, auf folgende Formen bringen[1]:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{e}{r_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\frac{\partial e}{\partial v} \qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{g}{r_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)\frac{\partial g}{\partial u}$$

oder

$$\frac{\partial \log \overline{e}}{\partial v} = \frac{r_1 r_2}{r_1 - r_2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{r_1}\right) \qquad \frac{\partial \log \overline{g}}{\partial u} = \frac{r_1 r_2}{r_1 - r_2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{r_2}\right).$$

Hieraus folgt nach (9), wenn man E, G einführt:

$$\frac{\partial \log \overline{E}}{\partial v} = \frac{1}{r_2 - r_1}\frac{\partial r_1}{\partial v} \qquad \frac{\partial \log \overline{G}}{\partial u} = \frac{1}{r_1 - r_2}\frac{\partial r_2}{\partial u}$$

und

$$\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v} \qquad \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u}.$$

Endlich erhält die Gauss'sche Gleichung (10) § 7 die Form:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v}\right) = -\frac{dd''}{\sqrt{eg}} = -\sqrt{EG}$$

oder nach (8):

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\right) + \sqrt{EG} = 0,$$

wie sich auch ergibt, wenn man die Gleichung (9) für die Kugel bildet, wobei $r_1 r_2 = 1$ wird.

Die erste Anwendung bilde die Herleitung der Differentialgleichungen der Flächen von constantem Krümmungsmaass k und von constanter mittlerer Krümmung h in verschiedenen Parametersystemen.

Wenn eine Fläche constantes negatives Krümmungsmaass $k = -1:\mu^2$ besitzt, so sind die Asymptotenlinien reell. Wählt man sie zu Parametercurven u, v, bezeichnet ihren Winkel mit ω, so ist nach (3) $\varepsilon = f' = 0$; $f^2 = 1:\mu^2$; folglich $p' = q' = 0$ und nach (7) § 1 $m' = n' = 0$; also bei passender Wahl[2] der Parameter (u, v) nach (4) § 1:

$$11) \qquad e = g = 1 \qquad f = \cos\omega \qquad \delta = \sin\omega \qquad d = d'' = 0 \qquad d' = \frac{\sin\omega}{\mu}.$$

Endlich hat man nach (8) zur Bestimmung von ω oder als

[1] Enneper, Zeitschrift für Math. u. Physik. VII. p. 58. 1862.
[2] Vgl. die Anmerkung p. 26.

Differentialgleichung der Fläche in den Parametern (u, v) der Asymptotenlinien:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} = \frac{\sin \omega}{\mu^2} \cdot ^1) \tag{12}$$

Ist diese Gleichung gelöst, so kennt man die Fundamentalgrössen e, f, g; d, d', d''. Damit aber ist nach dem Satze § 8 die Fläche eindeutig bestimmt.

Die Differentialgleichung der Krümmungslinien der Fläche wird nach (11): $du^2 - dv^2 = 0$. Setzt man daher $u + v = u_1$; $u - v = v_1$, so erhält man aus (12) als Differentialgleichung der Fläche in den Parametern (u_1, v_1) der Krümmungslinien:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u_1^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial v_1^2} = \frac{\sin \omega}{\mu^2} \cdot \tag{13}$$

Diese Gleichung lässt sich auch leicht direct aus den Gleichungen (5) bis (10) herleiten.

Soll eine Fläche constante mittlere Krümmung $h = \frac{2}{\mu}$ besitzen und wählt man zuerst die Minimallinien als Parametercurven, so erhält man nach (1) $e = g = 0$; $d' = f : \mu$; ferner $\frac{\partial d}{\partial v} = 0$, $\frac{\partial d''}{\partial u} = 0$, also bei passender Wahl der Parameter (u, v): $d = d'' = 1$ und als Gleichung für f oder als Differentialgleichung der Fläche:

$$\frac{\partial^2 \log f}{\partial u \partial v} = \frac{1}{f} - \frac{f}{\mu^2} \cdot \tag{14}$$

Wählt man dagegen die Krümmungslinien zu Parametercurven (u, v), so ist $f = d' = 0$ und $\frac{d}{e} + \frac{d''}{g} = \frac{2}{\mu}$, folglich nach (6) $\frac{\partial d}{\partial v} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial e}{\partial v}$; $\frac{\partial d''}{\partial u} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial g}{\partial u}$. Bei passender Wahl von u, v ist daher $d = \frac{e}{\mu} + 1$; $d'' = \frac{g}{\mu} - 1$, also $e = g$. Dies gibt den Satz:

Die Flächen von constanter mittlerer Krümmung (speciell die Minimalflächen $\mu = \infty$) besitzen isometrische Krümmungslinien[2]).

Nunmehr sind die fundamentalen Grössen:

$$e = g = \lambda \qquad f = d' = 0 \qquad d = \frac{\lambda}{\mu} + 1 \qquad d'' = \frac{\lambda}{\mu} - 1 \tag{15}$$

---

1) Hazzidakis, Journ. für Math. Bd. 88. p. 68 (1878).

2) Bonnet, Comptes rendus. t. 37. p. 529 (1853) und Journ. d. Math. t. V. p. 221 (1860).

und aus (9) folgt zur Bestimmung von λ oder als Differentialgleichung der Fläche:

$$\frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial v^2} = 2\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda}{\mu^2}\right). \tag{16}$$

Durch die Substitutionen $\lambda = \mu e^{i\theta}$; $u = u_1$; $v = iv_1$ geht dieselbe über in eine Gleichung für θ als Function von u_1, v_1, nämlich:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u_1^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial v_1^2} = -\frac{4 \sin \theta}{\mu}. \tag{17}$$

Die Uebereinstimmung in der Form der Gleichungen (13) und (17) zeigt, dass die Herleitung der Flächen von constantem Krümmungsmaass und von constanter mittlerer Krümmung im wesentlichen dieselben Aufgaben sind. In der That besteht ein sehr einfacher geometrischer Zusammenhang zwischen beiden Flächengattungen, der sich ausspricht in dem Satze[1]):

Die Parallelfläche einer Fläche von constantem Krümmungsmaass $1 : \mu^2$ im Abstand μ ist eine Fläche von der constanten mittleren Krümmung $1 : \mu$.

Denn sind x, y, z die Coordinaten einer Fläche in den Parametern u, v, so sind die Coordinaten der Parallelfläche x', y', z' im Abstand μ:

$$x' = x - \mu a \qquad y' = y - \mu b \qquad z' = z - \mu c. \tag{18}$$

Bildet man für diese Fläche die Fundamentalgrössen, so erhält man für die Hauptkrümmungsradien r_1' und r_2' die Werthe $r_1' = r_1 + \mu$; $r_2' = r_2 + \mu$, wie auch geometrisch daraus folgt, dass beide Flächen dieselben Normalen, also entsprechende Krümmungslinien besitzen. Daher ist die mittlere Krümmung h' der Parallelfläche:

$$h' = \frac{h + 2\mu k}{1 + \mu h + \mu^2 k}. \tag{19}$$

Ist nun $k = 1 : \mu^2$, so folgt $h' = 1 : \mu$ (q. e. d.).

Die Differentialgleichungen (12), (13) oder (14), (16), (17) lassen sich nur unter beschränkenden Voraussetzungen integriren.

Als zweite Anwendung geben wir die Differentialgleichung der Flächen mit isometrischen Krümmungslinien[2]). Wählt man die Krümmungslinien zu Parametercurven, so ist:

$$f = 0 \qquad d' = 0 \qquad e = g = \lambda. \tag{20}$$

1) Bonnet, Nouv. Ann. de Math. t. XII. p. 437 (1853).

2) H. Stahl, Journ. für Math. B. 111. Ist die Gleichung der Fläche in der Form $F(x, y, z) = 0$ gegeben, so ist F durch eine partielle Differentialgleichung der vierten Ordnung bestimmt. Vgl. Weingarten, Sitzungsber. d. Berl. Acad. 1883. p. 1163.

Hierzu kommen die Gleichungen (2), nämlich:

$$dd'' = -\frac{\lambda}{2} L \qquad \frac{\partial d}{\partial v} = \frac{d + d''}{2} \frac{\partial \log \lambda}{\partial v} \qquad \frac{\partial d''}{\partial u} = \frac{d + d''}{2} \frac{\partial \log \lambda}{\partial u}, \quad (21)$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial v^2} = L. \quad (22)$$

Eliminirt man aus der ersten und zweiten Gleichung (21) die Grösse d'', so erhält man eine lineare Differentialgleichung in d^2:

$$\frac{\partial d^2}{\partial v} - \frac{\partial \log \lambda}{\partial v} d^2 + \frac{\lambda}{2} \frac{\partial \log \lambda}{\partial v} L = 0.$$

Die Integration derselben ist leicht; man erhält, wenn zur Abkürzung:

$$\frac{1}{2}\int L \frac{\partial \log \lambda}{\partial v} dv = L_1 \qquad \frac{1}{2}\int L \frac{\partial \log \lambda}{\partial u} du = L_2 \quad (23)$$

gesetzt und aus (21) die entsprechende Gleichung in d'' hinzugefügt wird:

$$d^2 = \lambda(U - L_1) \qquad d''^2 = \lambda(V - L_2), \quad (24)$$

wo U Function von u, V Function von v ist. Hierdurch geht die erste Gleichung (21) über in:

$$4(U - L_1)(V - L_2) = L^2. \quad (25)$$

Das ist die gesuchte Differentialgleichung, welche λ als Function von u, v bestimmt. Sie enthält bereits zwei willkürliche Functionen U, V; ihre Lösung führt noch zwei weitere willkürliche Functionen von u, v mit sich. Ist (25) gelöst oder λ bestimmt, so erhält man L_1 und L_2 oder d und d'' durch Quadratur. Damit sind die sechs fundamentalen Grössen e, f, g, d, d', d'' ermittelt. Die Quadraturen zur Bestimmung von d und d'' lassen sich umgehen, wenn man aus den Gleichungen (21) noch $\frac{\partial d}{\partial u}$ und $\frac{\partial d''}{\partial v}$ bildet. Dann erhält man durch Gleichsetzung der beiden Werthe für $\frac{\partial^2 d}{\partial u \partial v}$ (oder $\frac{\partial^2 d''}{\partial u \partial v}$) eine Gleichung der Form $Ad^2 + Bd''^2 + C = 0$, deren Coefficienten bekannt sind und die mit der ersten Gleichung (21) verbunden d und d'' ergibt.

Man überzeugt sich leicht, dass die Differentialgleichung (16) nur ein specieller Fall von (25) ist. Denn der letzten Gleichung wird genügt, wenn man $U = V = 0$ und

$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda}{\mu^2}\right)$$

setzt.

Eine weitere Anwendung beziehe sich auf die Aufgabe, die Biegungsfläche einer gegebenen Fläche zu ermitteln[1]) oder die Fläche zu bestimmen, wenn e, f, g als Functionen von (u, v) gegeben sind. Hier sind die Grössen $\mathfrak{d}, \mathfrak{d}', \mathfrak{d}''$ oder nach (7) § 7 die Grössen t, t', t'' gesucht. Zur Bestimmung derselben hat man die Gleichungen (8) und (10) § 7 zu lösen. Die letztere hat die Form $tt''-t'^2=k$, wo das Krümmungsmaass k eine gegebene Function von e, f, g oder von (u, v) ist. Um in symmetrischer Weise zu einer einzigen Differentialgleichung in t' zu gelangen, wäre t und t'' zu eliminiren. Man könnte etwa $t=\mu(t'+i\sqrt{k})$, $t''=\frac{1}{\mu}(t'-i\sqrt{k})$ in die Gleichungen (8) § 7 eintragen und durch wiederholtes Differentiiren die Function μ eliminiren. Hierzu ist indess zu bemerken[2]), dass die resultirende Differentialgleichung in t' einen Inhalt von Integralen besitzen würde, der denjenigen der Gleichungen (8) und (10) § 7, von denen ausgegangen wurde, übertrifft. Die Absonderung der der Lösung der Aufgabe fremden Bestandtheile aber würde auf grosse Schwierigkeiten stossen.

Aehnliches gilt, wenn man statt der Grössen $\mathfrak{d}, \mathfrak{d}', \mathfrak{d}''$, welche die Coefficienten in der Differentialgleichung der Asymptotenlinien darstellen, die Gleichung dieser Linien selber in der Form $\varphi=a$, $\psi=b$ (mit den Parametern a, b) einführt. Dann ist, wenn λ ein Proportionalitätsfactor:

$$t=\lambda\varphi_1\psi_1 \qquad t'=\lambda(\varphi_1\psi_2+\psi_1\varphi_2) \qquad t''=\lambda\varphi_2\psi_2$$

und man erhält an Stelle der Gleichungen (8) § 7 zwei partielle Differentialgleichungen zur Bestimmung der Functionen φ und ψ[3]). Nach Lösung derselben würde sich der Factor λ aus der Gleichung $tt''-t'^2=k$ ergeben, womit $\mathfrak{d}, \mathfrak{d}', \mathfrak{d}''$ bestimmt wären.

Als beste Lösung der Aufgabe erscheint diejenige, welche sich unmittelbar an die Gauss'schen Gleichungen (9) § 2 anschliesst[4]). In ihnen sind die zu bestimmenden Grössen $\mathfrak{d}, \mathfrak{d}', \mathfrak{d}''$ durch eine einzige Grösse x ausgedrückt. Zur Bestimmung von x aber hat man nach (17) § 2 die Gleichung:

$$(26)\quad (x_{11}-px_1-qx_2)(x_{22}-p''x_1-q''x_2)-(x_{12}-p'x_1-q'x_2)^2=\delta^2\cdot k[1-\delta'(x)],$$

in der die Coefficienten nur von e, f, g abhängen, also bekannt sind. Diese Gleichung kann als Differentialgleichung der Fläche angesehen

1) Dies Problem ist besonders für specielle Fälle eingehend behandelt von Bour, Journ. Éc. Pol. Cah. 39 (1862) und Bonnet, das. Cah. 41 u. 42 (1865).

2) Weingarten, Festschrift der techn. Hochschule zu Berlin 1884. p. 32.

3) Darboux, Leçons. III. p. 285.

4) Bour, l. c. p. 15; Dini, Giorn. di Mat. II. p. 287 (1864); Bonnet, l. c. Cah. 42. p. 3; Weingarten, Festschrift. p. 31 ff.

werden; in der That gibt jede Lösung derselben eine Fläche der gesuchten Art. Sind e, f, g reell und soll die Fläche reell sein, so muss auch d, d', d'' reell sein, und es tritt daher nach (9) § 2 noch die Bedingung $1 - \delta'(x) > 0$ hinzu. Jeder reellwerthigen Lösung von (26), die dieser Bedingung genügt, entspricht eine reelle Lösung der Aufgabe.

Die Gleichung (26) für x ist linear in $x_{11}x_{22} - x_{12}^2$, x_{11}, x_{12}, x_{22}; die Differentialgleichung ihrer Charakteristiken ist nach (9) § 2:

$$d\,du^2 + 2d'\,du\,dv + d''dv^2 = 0,$$

d. h. die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung (26) sind die Asymptotenlinien der Fläche[1]).

Zum Schluss erwähnen wir noch die Flächen mit einem oder zwei Systemen von ebenen oder sphärischen Krümmungslinien. Wählt man die Krümmungslinien zu Parametercurven (u, v), so ist $f = d' = 0$ und zwischen e, g, d, d'' bestehen die drei Differentialgleichungen (6) und (9). Bezeichnet man nun (vgl. § 14 und 15) für die Krümmungslinien $v = \text{const.}$ und $u = \text{const.}$ den Radius der absoluten Torsion bez. mit ϱ_u und ϱ_v, den Osculationsradius bez. mit R_u und R_v, so ist die Bedingung dafür, dass die eine Schaar von Krümmungslinien ($v = \text{const.}$) eben sei, $\varrho_u = \infty$; die Bedingungen dafür, dass beide Schaaren eben seien, $\varrho_u = \infty$ und $\varrho_v = \infty$; ferner die Bedingung dafür, dass die eine Schaar ($v = \text{const.}$) sphärisch sei, $R_u = V$, dass beide Schaaren sphärisch seien, $R_u = V$ und $R_v = U$, wo U von u, V von v abhängt. Indem man die eine oder andere dieser Bedingungen zu den Gleichungen (6) und (9) hinzufügt, hat man die partiellen Differentialgleichungen des betr. Problems, denen die Grössen e, g, d, d'' genügen müssen.

Unter weiteren vereinfachenden Voraussetzungen lassen sich diese partiellen in gewöhnliche Differentialgleichungen umsetzen oder auch vollständig lösen. Doch führt dann häufig eine directe Verwerthung der vereinfachenden Voraussetzungen schneller zum Ziel[2]). Eine andere Behandlung der Flächen mit ebenen Krümmungslinien ist in § 11 angedeutet.

---

1) Darboux, Leçons. III. p. 252.

2) Von der Literatur, die sich auf diese Probleme bezieht, führen wir an: Monge-Liouville, Appl. p. 161. Joachimsthal, Programm des franz. Gymnasiums in Berlin (1848) und Journal für Math. Bd. 54 (1857). Bonnet, Comptes rendus T. 36 (1853). Serret, Comptes rendus T. 36 (1853). Enneper, Abh. d. Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Bd. 23 (1878). Pirondini, Giornale di Mat. T. XXII (1884).

§ 10. Anwendung auf ein dreifach orthogonales Flächensystem[1].

Die in §§ 7 und 8 entwickelten Gleichungen finden auch Verwendung bei der Untersuchung eines dreifach orthogonalen Flächensystems. Die Gleichungen

$$(1) \qquad x = x(u, v, w) \qquad y = y(u, v, w) \qquad z = z(u, v, w)$$

stellen in dreifacher Weise ein System von unendlich vielen Flächen dar, da z. B. einem jeden Werth von w eine Fläche mit den Parametercurven u, v entspricht. Um die früheren Formeln anwenden zu können, ist nichts weiter nöthig als die sechs fundamentalen Grössen e, f, g: d, d', d'' für die Fläche $w = \text{const.}$ aufzustellen. Die entsprechenden Grössen für die Flächen $u = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$ ergeben sich dann durch cyclische Vertauschung von u, v, w.

Dass die drei Flächensysteme (1) sich längs der Parametercurven orthogonal durchschneiden, wird ausgedrückt durch die Gleichungen

$$(2) \qquad \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = 0 \qquad \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w} = 0 \qquad \sum \frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial x}{\partial u} = 0,$$

wo die Summation sich je über drei gleichgebildete Ausdrücke in x, y, z erstreckt. Das Linienelement ds des Raumes zwischen zwei Punkten (u, v, w) und $(u + du, v + dv, w + dw)$ ist alsdann bestimmt durch

$$(3) \qquad ds^2 = H_1^2 du^2 + H_2^2 dv^2 + H_3^2 dw^2,$$

wo

$$(4) \qquad H_1^2 = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 \qquad H_2^2 = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 \qquad H_3^2 = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2.$$

Die drei Grössen H_1, H_2, H_3 sind, wie sich zeigen wird, fundamental und bestimmend für den Charakter des dreifach orthogonalen Systems. Vorerst sind nach (2) und (4) die drei ersten Fundamentalgrössen e, f, g der Fläche $w = \text{const.}$ bez. gleich $H_1^2, 0, H_2^2$.

Aus den Gleichungen (2) und (4) erhält man ferner für die Functionaldeterminante von x, y, z nach u, v, w den Ausdruck

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = H_1 H_2 H_3,$$

wie sich durch Quadriren der linken Seite sofort ergibt. Differentiirt man die drei Gleichungen (2) bez. nach w, u, v, so erhält man:

1) Lamé, Journ. de Math. t. V. p. 313 (1840); t. VIII. p. 397 (1843) und Leçons sur les coordonnées curvilignes (1859).

$$\sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v\,\partial w}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial w}\right)=0 \qquad \sum\left(\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial w}+\frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\right)=0$$
$$\sum\left(\frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v\,\partial w}\right)=0.$$

Addirt man die erste und dritte dieser Gleichungen und subtrahirt die zweite, so folgt

$$\sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v\,\partial w}=0 \qquad \sum\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial w\,\partial u}=0 \qquad \sum\frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}=0, \quad (6)$$

wobei die zwei letzten Gleichungen aus der ersten durch cyclische Vertauschung von u, v, w erhalten sind. Ferner erhält man aus der ersten Gleichung (4), wenn man nach u, v, w differentiirt und (2) berücksichtigt, die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} &= H_1\frac{\partial H_1}{\partial u}\\
\sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = -\sum\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} &= H_1\frac{\partial H_1}{\partial v}\\
\sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial w} = -\sum\frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} &= H_1\frac{\partial H_1}{\partial w},
\end{aligned} \quad (7)$$

die den Gleichungen (6) § 1 entsprechen.

Bezeichnet man mit $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ die Cosinus der Neigungswinkel, welche die Normale der Fläche $w = \text{const.}$ im Punkt (u, v) mit den Coordinatenaxen bildet, so hat man nach (22) § 1:

$$\alpha_3 = \frac{1}{H_3}\frac{\partial x}{\partial w} \qquad \beta_3 = \frac{1}{H_3}\frac{\partial y}{\partial w} \qquad \gamma_3 = \frac{1}{H_3}\frac{\partial z}{\partial w}. \quad (8)$$

Hieraus erhält man nun für die drei letzten Fundamentalgrössen d, d', d'' der Fläche $w = \text{const.}$, indem man die Definition (1) § 2 zu Grunde legt und die Gleichungen (6) und (7) benutzt:

$$\begin{aligned}
\alpha_3\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\beta_3\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+\gamma_3\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} &= \frac{1}{H_3}\sum\frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = -\frac{H_1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial w}\\
\alpha_3\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}+\beta_3\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}+\gamma_3\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} &= \frac{1}{H_3}\sum\frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = 0\\
\alpha_3\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}+\beta_3\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}+\gamma_3\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} &= \frac{1}{H_3}\sum\frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = -\frac{H_2}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial w}.
\end{aligned} \quad (9)$$

Hiernach hat man folgende Zusammenstellung für die Werthe der sechs Fundamentalgrössen e, f, g; d, d', d'' bezogen auf die drei orthogonalen Flächensysteme (1) $w = c$, $u = a$, $v = b$ (a, b, c Constanten) mit den entsprechenden Parametern (u, v), (v, w), (w, u):

(10)

	u	v	e	f	g	d	d'	d''
$w = c$	u	v	H_1^2	0	H_2^2	$-\frac{H_1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial w}$	0	$-\frac{H_2}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial w}$
$u = a$	v	w	H_2^2	0	H_3^2	$-\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial u}$	0	$-\frac{H_3}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial u}$
$v = b$	w	u	H_3^2	0	H_1^2	$-\frac{H_3}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial v}$	0	$-\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial v}$.

Es drücken sich demnach alle diese Fundamentalgrössen aus durch die Functionen H_1, H_2, H_3 und ihre Ableitungen nach u, v, w.

Nach der Tabelle (10) lassen sich aus den früheren Entwicklungen eine Reihe von Folgerungen ziehen, von denen nur die wichtigsten kurz erwähnt seien.

Aus dem Verschwinden von f und d' für die drei Flächensysteme folgt der Satz[1]) von Dupin:

Wenn drei Schaaren von Flächen sich orthogonal durchschneiden, so sind die Schnittcurven stets die Krümmungslinien der Flächen.

Bezeichnet man die Hauptkrümmungsradien der Fläche $w = \text{const.}$ für die Krümmungslinien $v = b$ und $u = a$ bez. mit r_{31} und r_{32}, so geben die Gleichungen (5) § 9 die Ausdrücke:

$$\frac{1}{r_{31}} = -\frac{1}{H_1 H_3}\frac{\partial H_1}{\partial w} \qquad \frac{1}{r_{32}} = -\frac{1}{H_2 H_3}\frac{\partial H_2}{\partial w} \tag{11}$$

nebst den entsprechenden für r_{12}, r_{13} und r_{23}, r_{21} und einer Reihe von Relationen zwischen den Radien r_{ik}, die wir übergehen[2]).

Wir bilden ferner die Fundamentalgleichungen des § 7 für ein dreifach orthogonales Flächensystem.

Bezeichnet man die Richtungscosinus der Normalen der Flächen $u = a$, $v = b$, $w = c$ (a, b, c Constante) bez. mit $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$, so hat man nach (22) § 1 (vgl. auch (8)):

$$\alpha_1 = \frac{1}{H_1}\frac{\partial x}{\partial u} \qquad \alpha_2 = \frac{1}{H_2}\frac{\partial x}{\partial v} \qquad \alpha_3 = \frac{1}{H_3}\frac{\partial x}{\partial w} \tag{12}$$

nebst den entsprechenden Gleichungen in (β, y) und (γ, z). Das System (2) § 7 führt auf[3]):

1) Dupin, Développements. p. 239.
2) Lamé, Leçons. p. 80 ff.
3) Lamé, Leçons. p. 89. Gl. (28) u. p. 91. Gl. (30).

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \alpha_1}{\partial u} &= -\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial v}\alpha_2 - \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial w}\alpha_3 & \frac{\partial \alpha_1}{\partial v} &= \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial u}\alpha_2 \\
\frac{\partial \alpha_2}{\partial u} &= \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial v}\alpha_1 & \frac{\partial \alpha_2}{\partial v} &= -\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial w}\alpha_3 - \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial u}\alpha_1 \\
\frac{\partial \alpha_3}{\partial u} &= \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial w}\alpha_1 & \frac{\partial \alpha_3}{\partial v} &= \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial w}\alpha_2 \\
\frac{\partial \alpha_1}{\partial w} &= \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial u}\alpha_3 & & \\
\frac{\partial \alpha_2}{\partial w} &= \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial v}\alpha_3 & & \\
\frac{\partial \alpha_3}{\partial w} &= -\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial u}\alpha_1 - \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial v}\alpha_2 & &
\end{aligned} \tag{13}$$

nebst den entsprechenden Gleichungen in $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ und $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. Aus (12) folgt:

$$x = \int (\alpha_1 H_1 du + \alpha_2 H_2 dv + \alpha_3 H_3 dw). \tag{14}$$

Die Mainardi'schen Gleichungen (6) § 7 oder (6) § 9 reduciren sich für das orthogonale Flächensystem auf drei Gleichungen, nämlich[1]):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 H_1}{\partial v \partial w} &= \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial w}\frac{\partial H_1}{\partial v} + \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_3}{\partial v}\frac{\partial H_1}{\partial w} \\
\frac{\partial^2 H_2}{\partial w \partial u} &= \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_3}{\partial u}\frac{\partial H_2}{\partial w} + \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial w}\frac{\partial H_2}{\partial u} \\
\frac{\partial^2 H_3}{\partial u \partial v} &= \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial v}\frac{\partial H_3}{\partial u} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial u}\frac{\partial H_3}{\partial v}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Die Gauss'schen Gleichungen (10) § 7 oder (9) § 9 erhalten die Form[2]):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial w}\right) + \frac{1}{H_1^2}\frac{\partial H_2}{\partial u}\frac{\partial H_3}{\partial u} &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial w}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial u}\right) + \frac{1}{H_2^2}\frac{\partial H_3}{\partial v}\frac{\partial H_1}{\partial v} &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial v}\right) + \frac{1}{H_3^2}\frac{\partial H_1}{\partial w}\frac{\partial H_2}{\partial w} &= 0.
\end{aligned} \tag{16}$$

Setzt man

$$\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial u} = H_{12} \qquad \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial u} = H_{13} \qquad \text{u. s. w.,} \tag{17}$$

so kann man die sechs Gleichungen (15) und (16) zwischen den drei Grössen H_1, H_2, H_3 ersetzen durch die folgenden neun Gleichungen zwischen den sechs Functionen H_{12}, H_{21}, H_{23}, H_{32}, H_{31}, H_{13}[3]):

1) Lamé, Leçons. p. 76. Gl. (8).
2) Lamé, Leçons. p. 78. Gl. (9).
3) Lamé, Leçons. p. 76 u. 79.

$$(18)\quad \begin{aligned} &\frac{\partial H_{23}}{\partial u} = H_{21}H_{13} \qquad \frac{\partial H_{31}}{\partial v} = H_{32}H_{21} \qquad \frac{\partial H_{12}}{\partial w} = H_{13}H_{32} \\ &\frac{\partial H_{32}}{\partial u} = H_{31}H_{12} \qquad \frac{\partial H_{13}}{\partial v} = H_{12}H_{23} \qquad \frac{\partial H_{21}}{\partial w} = H_{23}H_{31} \end{aligned}$$

und

$$(19)\quad \begin{aligned} &\frac{\partial H_{12}}{\partial u} + \frac{\partial H_{21}}{\partial v} + H_{31}H_{32} = 0 \qquad \frac{\partial H_{23}}{\partial v} + \frac{\partial H_{32}}{\partial w} + H_{12}H_{13} = 0 \\ &\frac{\partial H_{31}}{\partial w} + \frac{\partial H_{13}}{\partial u} + H_{23}H_{21} = 0. \end{aligned}$$

Durch eine leichte Combination erhält man aus (19) die Gleichung

$$(20)\quad \frac{\partial(H_{23}H_{32})}{\partial u} = \frac{\partial(H_{31}H_{13})}{\partial v} = \frac{\partial(H_{12}H_{21})}{\partial w} = H_{12}H_{23}H_{31} + H_{21}H_{32}H_{13}.$$

Die Gleichungen (13) bis (16) lösen die Aufgabe, das allgemeinste, dreifach orthogonale Flächensystem zu finden. Die Lösung zerfällt in zwei Theile; den ersten Theil bildet die Bestimmung der drei Grössen H_1, H_2, H_3 durch Integration des Systemes (15) und (16), den zweiten die Bestimmung der Grössen α_i, β_i, γ_i und damit der Coordinaten x, y, z durch Integration des Systemes (13). Man kann, ähnlich wie in § 8, zeigen, dass durch jedes den Gleichungen (15) und (16) genügende System von Werthen H_1, H_2, H_3 ein orthogonales Flächensystem (bis auf die Lage im Raum) eindeutig bestimmt ist. Die Bestimmung der drei Grössen H_1, H_2, H_3 aus den sechs Gleichungen (15) und (16) ist auf unendlich viele Arten möglich. In der That zeigt sich weiter unten, dass die Aufgabe, das allgemeinste orthogonale Flächensystem zu finden, auch auf die Lösung einer einzigen partiellen Differentialgleichung dritter Ordnung zurückgeführt werden kann.

Die Aufgabe, ein orthogonales Flächensystem zu bestimmen oder die Gleichungen (15) und (16) zu integriren, wird beschränkt und dadurch vereinfacht, wenn man die Bedingung hinzufügt, dass das dreifache System zugleich isometrisch sei. Dann kann man die Form der Functionen H_1, H_2, H_3 von vornherein näher angeben. Sind nämlich U, U_1 Functionen, die von u, ferner V, V_1 solche, die von v, endlich W, W_1 solche, die von w unabhängig sind, so hat man nach (8) § 3 die Bedingungen:

$$H_1 : H_2 = U : V_1 \qquad H_2 : H_3 = V : W_1 \qquad H_3 : H_1 = W : U_1.$$

Hieraus folgt

$$UVW = U_1V_1W_1 \quad \text{also} \quad U_1 = U \qquad V_1 = V \qquad W_1 = W,$$

daher

$$(21)\quad ds^2 = K(Udu^2 + Vdv^2 + Wdw^2) = L(V'W'du^2 + W'U'dv^2 + U'V'dw^2),$$

wenn U', V', W' Functionen von derselben Art wie U, V, W und K oder L Functionen von (u, v, w) sind.

Lamé[1]) hat gezeigt, dass die weitere Voraussetzung, dass in (21) L eine Constante sei, auf das System der confocalen Flächen zweiter Ordnung führt. Darboux[2]) hat die Frage für allgemeines L behandelt, für sämmtliche orthogonalen und isometrischen Flächensysteme die Werthe H_1, H_2, H_3 oder die Form des Linienelementes bestimmt und für einen Theil dieser Fälle die Flächengleichungen selber aufgestellt.

Man kann die Lamé'schen Formeln noch benutzen zum Beweis des Satzes[3]):

Die einzige conforme Abbildung des Raumes auf sich selber ist die Aehnlichkeit und die Inversion durch reciproke Radien.

Sind nämlich u, v, w die rechtwinkligen Coordinaten eines Raumpunktes und x, y, z die des Bildpunktes, so hat man für die Conformität der beiden Räume die Bedingung:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \lambda^{-2}(du^2 + dv^2 + dw^2), \qquad (22)$$

wo λ eine Function von (u, v, w) ist. Zu ihrer Bestimmung dienen eine Reihe von Gleichungen, die sich unmittelbar aus den Lamé'schen Gleichungen ergeben, wenn man $H_1 = H_2 = H_3 = \lambda^{-1}$ setzt. Die Gleichungen (16) führen auf die Bedingungen:

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial v^2} = \frac{\partial^2\lambda}{\partial v^2} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial w^2} = \frac{\partial^2\lambda}{\partial w^2} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial u^2} = \frac{1}{\lambda}\left\{\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial w}\right)^2\right\} \qquad (23)$$

und die Gleichungen (15) auf:

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial^2\lambda}{\partial v\,\partial w} = \frac{\partial^2\lambda}{\partial w\,\partial u} = 0. \qquad (24)$$

Die letzteren ergeben

$$\lambda = U + V + W, \qquad (25)$$

wo U, V, W Functionen bez. von u, v, w sind; aus (23) folgt weiter, wenn U' und U'' die erste und zweite Ableitung von U nach u sind,

$$U' + V'' = V'' + W'' = W'' + U'' = \frac{U'^2 + V'^2 + W'^2}{U + V + W}. \qquad (26)$$

Daher ist jeder dieser Ausdrücke unabhängig von u, v, w und man hat:

$$U'' = V'' = W'' = \frac{2}{c}, \qquad (27)$$

1) Lamé, Leçons. p. 93 ff.

2) Darboux, Ann. Éc. Norm. III. p. 130 (1866) und Comptes rendus 84. p. 298; vgl. Maschke, Diss. Göttingen 1880.

3) Monge-Liouville, Applications. Note VI. p. 609 ff.

wo c eine von u, v, w unabhängige Constante ist. Hiernach wird

$$U=\frac{1}{c}[(u-a_1)^2+a_2] \qquad V=\frac{1}{c}[(v-b_1)^2+b_2] \qquad W=\frac{1}{c}[(w-c_1)^2+c_2]$$

und man erhält aus (26):

$$(u-a_1)^2+(v-b_1)^2+(w-c_1)^2=(u-a_1)^2+(v-b_1)^2+(w-c_1)^2+a_2+b_2+c_2$$

oder

$$a_2+b_2+c_2=0.$$

Verlegt man den Coordinatenanfangspunkt nach (a_1, b_1, c_1), so wird endlich:

$$\lambda=\frac{1}{c}(u^2+v^2+w^2)$$

oder

$$dx^2+dy^2+dz^2=c^2\cdot\frac{du^2+dv^2+dw^2}{(u^2+v^2+w^2)^2}. \tag{28}$$

Setzt man zur Abkürzung $u^2+v^2+w^2=\varrho$, so ist also

$$H_1=H_2=H_3=c\varrho^{-1}.$$

Stellt man hiermit das System (13) auf und integrirt, so folgt

$$\alpha_1=1-2\varrho^{-1}u^2 \qquad \alpha_2=-2\varrho^{-1}uv \qquad \alpha_3=-2\varrho^{-1}uw$$

und man erhält nach (14)

$$x=\frac{cu}{u^2+v^2+w^2} \qquad y=\frac{cv}{u^2+v^2+w^2} \qquad z=\frac{cw}{u^2+v^2+w^2}. \tag{29}$$

Dies ist aber eine Inversion durch reciproke Radien, bezogen auf die Kugel $u^2+v^2+w^2=c^2$. Eine Ausnahme findet statt, wenn $c=\infty$. Dann sind nach (27) und (26) U, V, W und λ constant, d. h. die Abbildung besteht in Aehnlichkeit (q. e. d.).

Die Untersuchung der dreifach orthogonalen Flächensysteme lässt sich auch in der Weise führen, dass man statt der Gleichungen (1) ihre Auflösungen nach u, v, w zu Grunde legt[1]). Man hat dann

$$u(x, y, z)=u \qquad v(x, y, z)=v \qquad w(x, y, z)=w. \tag{30}$$

Die Orthogonalität dieser drei Flächensysteme wird ausgedrückt durch die Gleichungen

$$\sum\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}=0 \qquad \sum\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}=0 \qquad \sum\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}=0, \tag{31}$$

wo wieder die Summation sich auf x, y, z erstreckt. Ferner hat man

$$\alpha_3=\frac{1}{h_3}\frac{\partial w}{\partial x} \qquad \beta_3=\frac{1}{h_3}\frac{\partial w}{\partial y} \qquad \gamma_3=\frac{1}{h_3}\frac{\partial w}{\partial z}, \tag{32}$$

wenn

$$h_3^2=\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2, \tag{33}$$

1) Lamé, Leçons. p. 7 ff.

nebst den entsprechenden Gleichungen für den Index 1 und u oder den Index 2 und v.

Da nach (30) und (1)

$$\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial w} = 1,$$

so folgt aus (8) und (32)

$$H_i h_i = 1 \quad (i = 1, 2, 3). \tag{34}$$

Das Problem der Bestimmung eines dreifach orthogonalen Flächensystems führt jetzt auf den Satz[1]):

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass ein Flächensystem $w(x, y, z) = w$ mit dem Parameter w einem dreifach orthogonalen System angehört, ist eine partielle Differentialgleichung dritter Ordnung für die Function $w(x, y, z)$.

Aus den drei Gleichungen (31) ergeben sich nämlich durch ein- und zweimaliges Differenziren nach x, y, z im Ganzen $3 + 9 + 27 = 39$ Gleichungen, in welche $2(3 + 6 + 10) = 38$ verschiedene Ableitungen von u und v nach x, y, z eingehen. Man erhält daher durch Elimination dieser letzteren eine einzige partielle Differentialgleichung dritter Ordnung für die Function $w(x, y, z)$. Für die Herstellung dieser Gleichung und für den Beweis, dass sie auch die hinreichende Bedingung für die Existenz eines dreifach orthogonalen Systems ist oder dass jeder Flächenschaar $w(x, y, z) = w$, die dieser Gleichung genügt, zwei andere $u(x, y, z) = u$ und $v(x, y, z) = v$ zugeordnet sind, die mit der ersten ein orthogonales System bilden, verweisen wir auf die Literatur[2]).

Es schliesst sich noch folgende Bemerkung an. Nach (9) § 2 hat man die auch in dem System (13) enthaltene Gleichung

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}$$

nebst den entsprechenden Gleichungen in y und z. Die Vergleichung mit der letzten Gleichung (15) zeigt, dass die Grösse H_3 derselben Differentialgleichung genügt wie x, y, z und noch allgemeiner wie die Function $\alpha(x^2 + y^2 + z^2) + \beta x + \gamma y + \delta z + \varepsilon$, wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ unabhängig von u, v. Hierin ist der Satz enthalten, dass eine Flächenschaar $w(x, y, z) = w$, die der Differentialgleichung

$$\frac{1}{h_3} = \alpha(x^2 + y^2 + z^2) + \beta x + \gamma y + \delta z + \varepsilon \tag{35}$$

1) Bouquet, Journ. de Math. T. XI. p. 446 (1846). Bonnet, Comptes rendus (1862).

2) Darboux, Ann. Éc. Norm. III. p. 110 (1866). Weingarten, Journ. für Math. Bd. 83. p. 1 (1877).

genügt, in der h_3 durch (33) bestimmt ist und $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ willkürliche Functionen von w sind, stets einem orthogonalen System angehört[1]).

§ 11. Sphärische Abbildung. Ebenencoordinaten. Anwendungen.

Deutet man die Grössen a, b, c (§ 1), welche durch die Gleichung $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ verbunden sind, als Coordinaten eines Punktes auf einer Hilfskugel K vom Radius 1 um den Nullpunkt, so hat man die von Gauss[2]) eingeführte sphärische Abbildung der Fläche. Jedem Werthepaar (u, v) entspricht gleichzeitig ein Punkt auf der Fläche und ein Bildpunkt auf der Kugel derart, dass beide Punkte gleichgerichtete Normalen haben. Zur Untersuchung der sphärischen Abbildung bezeichnen wir alle auf die Kugel bezüglichen wie die entsprechenden auf die Fläche bezüglichen Grössen, nur statt mit kleinen mit grossen Buchstaben; also den Bildpunkt von (x, y, z), d. i. (a, b, c) mit (X, Y, Z), die Cosinus der Neigungswinkel der Kugelnormale mit (A, B, C) u. s. f. Dann ist

$$X = A = a \qquad Y = B = b \qquad Z = C = c \tag{1}$$

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1. \tag{2}$$

Aus (3) § 2 ergeben sich für $d' = 0$ die Sätze:

1. Das sphärische Bild der einen von zwei conjugirten Richtungen steht senkrecht auf der anderen;

folglich, da die Tangentialebene der Fläche und der Kugel in entsprechenden Punkten parallel sind:

2. Das sphärische Bild der Richtung einer Asymptotenlinie ist senkrecht zu dieser Richtung.

3. Das sphärische Bild der Richtung einer Krümmungslinie ist parallel zu dieser Richtung.

Diese Sätze können, wie schon früher (§ 5) bemerkt wurde, auch als Definitionen der conjugirten Linien, der Asymptotenlinien und der Krümmungslinien benutzt werden.

Von Wichtigkeit sind vor Allem die sechs für die Kugel gebildeten Fundamentalgrössen E, F, G; D, D', D''. Da die Gauss'sche Hilfskugel eine Fläche darstellt, deren Punkte durch die Gleichungen (1) gegeben sind, so kann man in den früheren Gleichungen für x, y, z und gleichzeitig für a, b, c setzen X, Y, Z; ferner für die Grössen e, f, g; d, d', d'' die Grössen E, F, G; D, D', D'' und

1) Darboux, Ann. Éc. Norm. 2. Sér. VII. p. 112 (1878). Weingarten, l. c. p. 11.

2) Gauss, Disq. gen. Art. 6.

für die aus e, f, g gebildeten Grössen p, p', p'', q, q', q'' die aus E, F, G entsprechend gebildeten Grössen P, P', P'', Q, Q', Q''. Hiernach folgt aus den Gleichungen (3) § 2:

$$D = -E \qquad D' = -F \qquad D'' = -G, \tag{3}$$

ferner aus den Gleichungen (6), (7), (16), (17) § 2:

$$E = h\mathfrak{d} - ke \qquad F = h\mathfrak{d}' - kf \qquad G = h\mathfrak{d}'' - kg \tag{4}$$

und hieraus

$$H = -2 \qquad K = 1 \qquad R_1 = R_2 = -1.$$

Endlich wird

$$\Delta = \sqrt{EG - F^2} = k\delta = \frac{\mathfrak{d}\mathfrak{d}'' - \mathfrak{d}'^2}{\delta} \tag{5}$$

und das Linienelement auf der Kugel nimmt die Form an:

$$\begin{aligned} dS^2 &= dX^2 + dY^2 + dZ^2 \\ &= h(\mathfrak{d}du^2 + 2\mathfrak{d}'dudv + \mathfrak{d}''dv^2) - k(edu^2 + 2fdudv + gdv^2). \end{aligned} \tag{6}$$

Aus (4) folgen die Sätze:

Durch die sphärische Abbildung gehen die Krümmungslinien der Fläche in ein Orthogonalsystem auf der Kugel über.

Denn aus $f = 0$, $\mathfrak{d}' = 0$ folgt $F = 0$.

Umgekehrt: Von den Orthogonalsystemen auf der Fläche gehen, wenn die Fläche nicht eine Minimalfläche ist, nur die Krümmungslinien wieder in ein Orthogonalsystem auf der Kugel über.

Denn aus $f = 0$, $F = 0$ folgt $\mathfrak{d}' = 0$, wenn nicht $h = 0$ ist, d. h. wenn nicht die Fläche eine Minimalfläche ist.

Aus (4) folgt:

$$Eg - 2Ff + Ge = \delta^2(h^2 - 2k), \tag{7}$$

$$E\mathfrak{d}'' - 2F\mathfrak{d}' + G\mathfrak{d} = \delta^2 hk. \tag{8}$$

Verbindet man die letzte Gleichung mit (5), so erhält man für die mittlere Krümmung h und das Krümmungsmaass k der Fläche die Ausdrücke:

$$h = \frac{E\mathfrak{d}'' - 2F\mathfrak{d}' + G\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}\mathfrak{d}'' - \mathfrak{d}'^2} \qquad k = \frac{EG - F^2}{\mathfrak{d}\mathfrak{d}'' - \mathfrak{d}'^2}.^{1}) \tag{9}$$

Trägt man in (4) die Werthe für h und k aus (16) und (17) § 2 ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \delta^2 E &= e\mathfrak{d}'^2 - 2f\mathfrak{d}\mathfrak{d}' + g\mathfrak{d}^2 \\ \delta^2 F &= e\mathfrak{d}'\mathfrak{d}'' - f(\mathfrak{d}\mathfrak{d}'' + \mathfrak{d}'^2) + g\mathfrak{d}\mathfrak{d}' \\ \delta^2 G &= e\mathfrak{d}''^2 - 2f\mathfrak{d}'\mathfrak{d}'' + g\mathfrak{d}'^2. \end{aligned} \tag{10}$$

1) Weingarten, Festschrift der techn. Hochschule zu Berlin. 1884. p. 41.

Die Auflösung ergibt für e, f, g Gleichungen von ähnlichem Bau, nämlich:

$$\begin{aligned} \Delta^2 e &= Ed'^2 - 2Fdd' + Gd^2 \\ \Delta^2 f &= Ed'd'' - F(dd'' + d'^2) + Gdd' \\ \Delta^2 g &= Ed''^2 - 2Fd'd'' + Gd'^2. \end{aligned} \tag{11}$$

Es sollen jetzt statt der Punktcoordinaten (x, y, z) die Ebenencoordinaten der Fläche als Functionen von (u, v) gegeben sein und die zur Untersuchung der Fläche dienenden Formeln kurz zusammengestellt werden[1]). Die Gleichung der Tangentialebene im Punkt (x, y, z) sei, wenn ξ, η, ζ die laufenden Punktcoordinaten sind:

$$X\xi + Y\eta + Z\zeta - T = 0. \tag{12}$$

Die Coefficienten X, Y, Z, T sind die Ebenencoordinaten der Fläche. Wir fügen noch die Bedingung hinzu

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1, \tag{13}$$

welche die Allgemeinheit nicht beschränkt, da man, wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, die Coefficienten X, Y, Z, T nur durch $\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ zu dividiren braucht. Unter der Voraussetzung (13) sind X, Y, Z identisch mit den Werthen (1), d. h. mit den Cosinus der Neigungswinkel der Flächennormale gegen die Coordinatenaxen, während T den Abstand der Tangentialebene vom Nullpunkt bedeutet.

Wir zeigen zunächst, wie man die Punktcoordinaten (x, y, z) der Fläche erhält, wenn die Ebenencoordinaten X, Y, Z, T als Functionen von (u, v) gegeben sind. Da (x, y, z) der Berührungspunkt der Tangentialebene (12) ist, so hat man identisch:

$$xX + yY + zZ - T = 0. \tag{14}$$

Differenzirt man nach u und v, so erhält man nach (2) § 2, wenn man die Abkürzungen (2) § 1 benutzt

$$\begin{aligned} xX_1 + yY_1 + zZ_1 - T_1 &= 0 \\ xX_2 + yY_2 + zZ_2 - T_2 &= 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Die drei Gleichungen (14) und (15) sind nach x, y, z aufzulösen. Der gemeinsame Nenner wird nach (24) § 1 gleich Δ. Der Zähler

1) Die Gleichungen für Punkt- und Ebenencoordinaten werden erst dann vollkommen dualistisch, wenn man statt des imaginären Kugelkreises im Unendlichen eine allgemeine Fläche zweiter Ordnung als massgebend einführt nach dem Vorgange von A. Cayley, Phil. Trans. T. 149. p. 61 (1859).

von x wird, wenn man (23) und (25) § 1 (gebildet für X, Y, Z) anwendet,

$$\begin{vmatrix} T & Y & Z \\ T_1 & Y_1 & Z_1 \\ T_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = \Delta TX + \frac{1}{\Delta}[T_1(GX_1 - FX_2) + T_2(EX_2 - FX_1)].$$

Daher ist

$$x = XT + \Delta'(X, T) \quad y = YT + \Delta'(Y, T) \quad z = ZT + \Delta'(Z, T), \quad (16)$$

wenn man zur Abkürzung setzt (vgl. (8) § 17):

$$\Delta'(X, T) = \frac{1}{\Delta^2}[EX_2T_2 - F(X_1T_2 + T_1X_2) + GX_1T_1]. \quad (17)$$

Wir entwickeln ferner gewisse den Gleichungen (9) § 2 für x, y, z analoge partielle Differentialgleichungen für die Grössen X, Y, Z, T. Aus (9) § 2 erhält man unmittelbar mit Rücksicht auf (3) für X die Gleichungen:

$$\begin{aligned} X_{11} - PX_1 - QX_2 + EX &= 0 \\ X_{12} - P'X_1 - Q'X_2 + FX &= 0 \\ X_{22} - P''X_1 - Q''X_2 + GX &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Für Y, Z gelten entsprechende Gleichungen mit denselben Coefficienten. Etwas anders lauten die Gleichungen für T. Aus (15) erhält man durch Differentiation nach u, v mit Rücksicht auf (3) § 2

$$\begin{aligned} xX_{11} + yY_{11} + zZ_{11} - T_{11} &= \mathfrak{d} \\ xX_{12} + yY_{12} + zZ_{12} - T_{12} &= \mathfrak{d}' \\ xX_{22} + yY_{22} + zZ_{22} - T_{22} &= \mathfrak{d}''. \end{aligned} \quad (19)$$

Multiplicirt man die Gleichung (14) mit E, die Gleichungen (15) bez. mit $-P$ und $-Q$ und addirt zu der ersten Gleichung (19), so folgt wegen (18):

$$\begin{aligned} T_{11} - PT_1 - QT_2 + ET &= -\mathfrak{d} \\ T_{12} - P'T_1 - Q'T_2 + FT &= -\mathfrak{d}' \\ T_{22} - P''T_1 - Q''T_2 + GT &= -\mathfrak{d}''\ ^1). \end{aligned} \quad (20)$$

Hiermit sind die sechs Fundamentalgrössen der Fläche e, f, g; $\mathfrak{d}, \mathfrak{d}', \mathfrak{d}''$ in X, Y, Z, T und ihren Ableitungen nach u, v dargestellt; es ergeben sich nämlich die Grössen $\mathfrak{d}, \mathfrak{d}', \mathfrak{d}''$ aus (20) und darnach die Grössen e, f, g aus (11).

Um nicht nochmals auf die Ebenencoordinaten zurückkommen zu müssen, stellen wir hier auch die für die Untersuchung einer

1) Weingarten, Festschrift. p. 41 (1884).

Flächencurve wichtigen Grössen ds^2, L, M, N (§ 14) durch X, Y, Z, T und ihre Ableitungen nach u, v dar. Nach (11) hat man für ds^2:

$$(21)\quad \Delta^2 ds^2 = E(\boldsymbol{d}'du + \boldsymbol{d}''dv)^2 - F(\boldsymbol{d}du + \boldsymbol{d}'dv)(\boldsymbol{d}'du + \boldsymbol{d}''dv) + G(\boldsymbol{d}du + \boldsymbol{d}'dv)^2.$$

Der Ausdruck für L ergibt sich unmittelbar aus den Werthen von $\boldsymbol{d}, \boldsymbol{d}', \boldsymbol{d}''$ (20) und lässt sich durch Zuziehung der Gleichungen (18) leicht auf die Form bringen:

$$(22)\quad L = \frac{1}{\Delta}\,|\,X\ \ X_1\ \ X_2\ \ X_{11}du^2 + 2X_{12}dudv + X_{22}dv^2\,|,$$

wo die Determinante der rechten Seite vier in X, Y, Z, T gleich gebildete Horizontalreihen enthält, von denen nur die erste angeschrieben ist.

Zur Darstellung von M bilden wir aus (4):

$$E du + F dv = h(\boldsymbol{d}du + \boldsymbol{d}'dv) - k(edu + fdv)$$
$$F du + G dv = h(\boldsymbol{d}'du + \boldsymbol{d}''dv) - k(fdu + gdv),$$

wonach der Ausdruck für M die Form erhält:

$$(23)\quad M = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \boldsymbol{d}du + \boldsymbol{d}'dv & Edu + Fdv \\ \boldsymbol{d}'du + \boldsymbol{d}''dv & Fdu + Gdv \end{vmatrix}.$$

Setzt man die Werthe von $\boldsymbol{d}, \boldsymbol{d}', \boldsymbol{d}''$ aus (20) ein und ordnet nach den Ableitungen von T, so erhält man als Differentialgleichung der Krümmungslinien $M = 0$:

$$(23a)\quad A_1 \frac{\partial T}{\partial u} + A_2 \frac{\partial T}{\partial v} + B_1 d\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right) + B_2 d\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right) = 0,$$

wo die Coefficienten A_1, A_2, B_1, B_2 leicht anzugebende Werthe haben. Da nach (18), die Gleichung (23a) mit denselben Coefficienten auch für X, Y, Z besteht, so erhält durch Elimination dieser Coefficienten die Gleichung der Krümmungslinien auch die Form:

$$(24)\quad \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v} & d\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right) & d\left(\frac{\partial X}{\partial v}\right) \end{vmatrix} = 0\ ^{1}),$$

mit derselben Abkürzung wie in (22).

Der Ausdruck für N endlich, der $= 0$ gesetzt die Differentialgleichung der geodätischen Linien der Fläche liefert, ist complicirter und daher auch von geringerem Interesse. Man bildet ihn am einfachsten nach (1) und (2) § 14 aus:

$$(25)\quad \Delta N = \begin{vmatrix} X & dx & d^2x \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X & \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v} \end{vmatrix}$$

durch Multiplication dieser beiden Determinanten, deren zweite und dritte Horizontalreihen ebenso in Y, y und Z, z gebildet sind, wie die erste in X, x.

1) Darboux, Leçons. I. p. 240.

Wir fügen auch hier ein paar Anwendungen hinzu. Nach (11) ist die Bedingung dafür, dass die Parametercurven u, v orthogonal sind ($f = 0$):

$$Ed'd'' - F(dd'' + d'^2) + Gdd' = 0; \tag{26}$$

ferner nach (20) die Bedingung dafür, dass die Parametercurven u, v conjugirt sind ($d' = 0$):

$$T_{12} - P'T_1 - Q'T_2 + FT = 0. \tag{27}$$

Verbindet man die Gleichung (27) mit den entsprechenden Gleichungen in X, Y, Z (18), so geht die Bedingung dafür, dass die Parametercurven conjugirt sind, über in

$$|X_{12} \quad X_1 \quad X_2 \quad X| = 0^1), \tag{28}$$

wo die Determinante der linken Seite wie in (22) abgekürzt geschrieben ist.

Endlich sind die beiden Bedingungen dafür, dass die Parametercurven u, v die Krümmungslinien der Fläche sind ($f = 0$, $d' = 0$) nach (4) und (20), wenn man die Werthe für P' und Q' einträgt,

$$F = 0 \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} \frac{\partial T}{\partial u} - \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} \frac{\partial T}{\partial v} = 0, \tag{29}$$

woraus man durch Verbindung mit den entsprechenden Gleichungen in X, Y, Z (18) wieder das Verschwinden gewisser dreigliedriger Determinanten ableiten kann.

Eine zweite Anwendung möge sich auf die Herleitung von Flächen bestimmter Art beziehen. Ist die sphärische Abbildung einer Fläche gegeben, d. h. sind entweder X, Y, Z als Functionen zweier Parameter u, v gegeben mit der Bedingung, dass $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ oder sind E, F, G als Functionen von u, v gegeben mit der Bedingung, dass $K = 1$, wo K der in E, F, G gebildete Gauss'sche Ausdruck für das Krümmungsmaass (d. i. die rechte Seite der Gleichung (10) § 7, gebildet in E, F, G), so ist damit die Fläche noch nicht definirt, vielmehr ist T noch eine willkürliche Function der Parameter u, v. Zur Bestimmung der Fläche ist noch eine weitere Bedingung nöthig; wir betrachten folgende Fälle.

1. Die Fläche sei so beschaffen, dass die Parametercurven orthogonal sind ($f = 0$). Dann tritt die Gleichung (26) hinzu oder, wenn man die linken Seiten in (20) bez. mit $(T)_{11}$, $(T)_{12}$, $(T)_{22}$ bezeichnet, für T die Gleichung:

$$E(T)_{12}(T)_{22} - F[(T)_{11}(T)_{22} + (T)_{12}^2] + G(T)_{11}(T)_{12} = 0, \tag{30}$$

1) Darboux, Leçons I. p. 121.

die als Differentialgleichung der Fläche angesehen werden kann. Ist T aus (30) ermittelt, so findet man, wenn X, Y, Z gegeben war, x, y, z unmittelbar aus (16); dagegen erhält man, wenn E, F, G gegeben war, d, d', d'' aus (20) und e, f, g aus (11), womit die Fläche eindeutig bestimmt ist.

2. Die Parametercurven der Fläche seien conjugirt ($d' = 0$). Dann hat man in (27) die Differentialgleichung der Fläche.

3. Die gegebenen Grössen X, Y, Z seien so beschaffen, dass $F = 0$ ist und die gesuchte Fläche von der Art, dass die Parametercurven die Krümmungslinien der Fläche sind ($f = 0$, $d' = 0$). Die Differentialgleichung der Fläche ist alsdann die Gleichung (29) in T.[1])

4. Für die Fläche sei die mittlere Krümmung h constant (oder auch als Function von (u, v) gegeben). Dann ist nach (9) und (20) die Differentialgleichung der Fläche in T:

$$(31) \quad E(T)_{22} - 2F(T)_{12} + G(T)_{11} + h[(T)_{11}(T)_{22} - (T)_{12}^2] = 0\,^2).$$

5. Für die Fläche sei das Krümmungsmaass k constant (oder auch als Function von (u, v) gegeben). Dann ist die Differentialgleichung der Fläche nach (9):

$$(32) \quad k[(T)_{11}(T)_{22} - (T)_{12}^2] = EG - F^2.$$

Man kann diese Betrachtungen verwerthen zur Herleitung der Flächen mit einem System von ebenen Krümmungslinien (vgl. § 9 auch bez. der Literatur).

Nach dem Joachimsthal'schen Satze (§ 15) ist das sphärische Bild einer ebenen Krümmungslinie ein Kleinkreis, dessen Ebene parallel der Ebene der Krümmungslinie ist. Man erhält nun auf der Kugel (2) das allgemeinste einfach unendliche System von Kreisen, wenn man sie durch eine Ebene schneidet, deren Gleichung von der Form ist

$$(33) \quad U_1 X + U_2 Y + U_3 Z = 1,$$

wo U_1, U_2, U_3 beliebige Functionen eines Parameters u sind. Man kann diese Ebene etwa als die Normalebene einer beliebig gegebenen Raumcurve ansehen.

Wir fassen die Kreisschnitte der Ebenen (33) mit der Kugel (2) als ein erstes System von Curven C_u mit dem Parameter u, die orthogonalen Trajectorien derselben auf der Kugel als ein zweites System

1) Enneper, Nachr. d. Kgl. Ges. d. W. zu Göttingen, 1870, p. 78 in anderer Herleitung.

2) Weingarten, Festschrift. p. 42.

von Curven C_v mit dem Parameter v auf. Um die Curven C_v zu finden, kann man die stereographische Projection benutzen. Denn das Kreissystem C_u der Kugel geht durch diese Projection wieder in ein Kreissystem E_u der Ebene über. Sucht man die orthogonalen Trajectorien E_v von E_u und überträgt sie auf die Kugel, so hat man das System C_v. Nun drücken sich die Coordinaten (X, Y, Z) eines Punktes der Kugel (2) in den Coordinaten (ξ, η) seiner stereographischen Projection nach (18) § 3 aus durch die Gleichungen

$$X = \frac{2\xi}{\xi^2+\eta^2+1} \qquad Y = \frac{2\eta}{\xi^2+\eta^2+1} \qquad Z = \frac{\xi^2+\eta^2-1}{\xi^2+\eta^2+1}. \tag{34}$$

Trägt man diese Werthe in (33) ein, so hat man das System E_u in der Ebene (ξ, η) in der Form $f(\xi, \eta, u) = 0$. Ist das orthogonale System E_v: $\varphi(\xi, \eta, v) = 0$, so erhält man durch Eintragen der Werthe von ξ, η aus (34) das System C_v in der Form:

$$\Phi(X, Y, Z, v) = 0. \tag{35}$$

Die Verbindung der Gleichungen (2), (33) und (35) gibt die Coordinaten X, Y, Z der sphärischen Abbildung der gesuchten Fläche als Function der Parameter u, v.

Man kennt nunmehr die Grössen E und G (während $F = 0$ ist) und hat nur noch die Differentialgleichung (29) zu lösen. Das ist hier vollständig möglich. Denn die Bedingung, dass das System der Krümmungslinien $u = \text{const.}$ eben sei, sagt nach § 15, dass der zugehörige Torsionsradius $\varrho_v = \infty$ sei oder nach (26) § 14, dass H_v Function von u oder endlich nach (25) § 14, dass

$$\frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = \frac{1}{U} \qquad \text{also} \qquad \sqrt{E} = U \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u},$$

wo U Function von u ist. Hiernach nimmt die Differentialgleichung (29) für T die Form an

$$\frac{1}{U} \frac{\partial T}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial T}{\partial u} \right).$$

Als erstes Integral erhält man

$$\frac{\partial T}{\partial u} = \frac{\sqrt{E}}{U} (T - U_0)$$

und wenn man zur Abkürzung

$$e^{\int \frac{\sqrt{E}}{U} du} = P \qquad \frac{\sqrt{E} U_0}{U} = Q \tag{36}$$

setzt, als zweites Integral

$$T = P(V - \int P^{-1} Q dv), \tag{37}$$

wo V Function von v. Damit ist die Aufgabe gelöst. Die Lösung erfordert, abgesehen von den Quadraturen in (36) und (37), nur die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung, welche die orthogonalen Trajectorien (35) des Curvensystems $u = \text{const.}$ auf der Kugel ergibt. In die Lösung gehen fünf willkürliche Functionen ein, nämlich eine Function V von v und vier Functionen U_0, U_1, U_2, U_3 von u, da man $U = u$ setzen kann.

Soll die Fläche zwei Systeme von ebenen Krümmungslinien besitzen, so ist die sphärische Abbildung von vornherein gegeben. Die Bilder der zwei Systeme von Krümmungslinien sind nämlich zwei Systeme von Kleinkreisen, die sich rechtwinklig durchschneiden. Solche zwei Kreissysteme werden aber, wie bekannt oder wie aus der stereographischen Projection folgt, nur gebildet von den Schnittcurven der Kugel mit zwei Ebenenbüscheln mit den Parametern u, v, deren Axen reciproke Polaren der Kugel sind. Indem man solche Axen beliebig wählt, hat man unmittelbar X, Y, Z und hierzu aus (29) T als Function von (u, v). Die Lösung der Aufgabe erfordert also nach (36) und (37) nur zwei Quadraturen und führt nur zwei willkürliche Functionen U_0 und V mit sich. Die geometrische Betrachtung gibt den Satz:

Für jede Fläche mit zwei Systemen von ebenen Krümmungslinien sind die Ebenen des einen Systems parallel einer Geraden g, die des anderen parallel einer Geraden g_1. Diese beiden Geraden sind zu einander senkrecht.

§ 12. Anwendung auf Minimalflächen.

Die Minimalflächen[1]), d. h. diejenigen einfachen Flächen, die bei gegebener Umgrenzung den kleinsten Inhalt haben, sind geometrisch charakterisirt durch die Bedingung, dass in jedem Punkt die Hauptkrümmungsradien r_1 und r_2 gleich und entgegengesetzt gerichtet sind. Sie sind daher definirt durch $r_1 + r_2 = 0$ oder $h = 0$ oder nach (16) § 2 durch die Gleichung:

$$(1) \qquad c\mathfrak{d}'' - 2f\mathfrak{d}' + g\mathfrak{d} = 0.$$

1) Die Differentialgleichung der Minimalflächen mittels Variationsrechnung wurde aufgestellt von Lagrange, Misc. Taur. (1760—61). Werke. I. p. 335. Die geometrische Interpretation derselben ($h = 0$) gab Meunier, Sav. Etr. t. X. p. 477 (1785). Die Integration wurde ausgeführt von Monge-Liouville, Applications. p. 211 ff.

Aus ihr ergeben sich folgende Eigenschaften der Minimalflächen:

Die Minimallinien sind conjugirt.

Denn aus $e = g = 0$ folgt $d' = 0$.

Die Asymptotenlinien sind orthogonal.

Denn aus $d = d'' = 0$ folgt $f = 0$.

Von diesen Sätzen gilt offenbar auch die Umkehrung, nämlich:

Sind für eine Fläche die Minimallinien conjugirt oder die Asymptotenlinien orthogonal, so ist die Fläche eine Minimalfläche.

Dass die Krümmungslinien der Minimalflächen isometrisch sind, wurde in § 9 bewiesen. In § 17 wird gezeigt, dass ein System von isometrischen Linien auch erhalten wird durch jedes System von ebenen Parallelschnitten und seine orthogonalen Trajectorien, also z. B. durch die Niveaucurven der Fläche und die Linien der stärksten Neigung.

Ferner hat man für die sphärische Abbildung auf die Kugel K nach (4) § 11:

$$E = -D = hd - ke \quad F = -D' = hd' - kf \quad G = -D'' = hd'' - kg. \quad (2)$$

Hieraus ergeben sich für die Minimalflächen, indem man $h = 0$ setzt, die folgenden Sätze:

1. Die sphärischen Bilder der Minimallinien sind wieder Minimallinien und zugleich Asymptotenlinien (die geradlinigen Erzeugenden der Kugel).

Denn aus $e = g = 0$ folgt $E = -D = 0$, $G = -D'' = 0$.

2. Die sphärischen Bilder von isometrischen Linien, insbesondere also auch der Krümmungslinien, sind wieder isometrische Linien.

Denn aus $e = g$; $f = 0$ folgt $E = G$; $F = 0$.

3. Die sphärische Abbildung einer Minimalfläche ist dem Urbild conform[1]).

Denn aus (2) folgt: $dS^2 = -k ds^2$ oder $ds = r dS$, wenn r der Hauptkrümmungsradius der Fläche ist.

Diese drei Sätze sind wiederum charakteristisch für die Minimalfläche, d. h. sie lassen sich in folgender Weise umkehren:

4. Sind die sphärischen Bilder der Minimallinien auf einer Fläche wieder Minimallinien, so ist die Fläche entweder eine Minimalfläche oder eine Kugel.

---

1) Bonnet, Journ. d. Math. t. V. p. 227 (1860).

Denn für $e = g = 0$ und $E = G = 0$ folgt aus (2) $hd = 0$; $hd'' = 0$, also

entweder $h = 0$, d. h. die Fläche ist eine Minimalfläche;

oder $d = d'' = 0$, also nach (10) § 5 $r_1 = r_2$, d. h. die Fläche ist eine Kugel.

5. Sind die sphärischen Bilder von isometrischen Linien auf einer Fläche wieder isometrische Linien, so ist die Fläche entweder eine Minimalfläche oder eine Kugel.

Denn aus $e = g$; $f = 0$ und $E = G$; $F = 0$ folgt nach (2): $hd = hd''$; $hd' = 0$, also

entweder $h = 0$ oder $d = d''$; $d' = 0$, also nach (10) § 5 $r_1 = r_2$.

6. Ist die sphärische Abbildung einer Fläche dem Urbild conform, so ist die Fläche entweder eine Minimalfläche oder eine Kugel.

Denn für die Conformität einer Fläche mit ihrer sphärischen Abbildung gelten nach (2) die Bedingungen:

$$hd - ke = \mu e \qquad hd' - kf = \mu f \qquad hd'' - kg = \mu g,$$

wo μ ein noch zu bestimmender Factor. Multiplicirt man diese Gleichungen einmal bez. mit d'', $-2d'$, d, das anderemal bez. mit g, $-2f$, e und addirt jedesmal, so erhält man nach (16) und (17) § 2:

$$2hk = h(\mu + k) \qquad h^2 = 2(\mu + k).$$

Hieraus folgt

entweder: $h = 0$; $\mu = -k$, d. h. die Fläche ist eine Minimalfläche

oder: $\mu = k$; $h^2 = 4k$, also $r_1 = r_2$, d. h. die Fläche ist eine Kugel.

— — —

Zur weiteren Untersuchung der Minimalfläche leiten wir ihre Gleichung nach der Methode des § 8 her[1]). Zunächst sind die Fundamentalgrössen e, f, g; d, d', d'' aufzustellen. Wählt man als Parametercurven (u, v) die Minimallinien, so ist

$$(3) \qquad e = g = 0 \qquad d' = 0.$$

Alsdann hätte man, wenn $d = d'' = 1$ gesetzt würde, die Differentialgleichung (14) § 9 unter der Voraussetzung $\mu = \infty$ zu integriren. Das allgemeine Integral enthält nach Liouville[2]) zwei will-

1) Enneper, Zeitschrift für Math. Bd. IX (1864). Die Enneper'sche Herleitung ist hier so abgeändert, dass man unmittelbar die von Herrn Weierstrass (Sitzungsber. d. Berl. Acad. 1866) seinen bekannten Untersuchungen über Minimalflächen zu Grunde gelegte Form erhält.

2) Monge-Liouville, Applications. Note IV. p. 597.

kürliche Functionen U und V, von denen die erste nur von u, die zweite nur von v abhängt. Wir ändern die Behandlung etwas ab und führen sogleich zwei solche Functionen U, V ein, indem wir setzen:

$$d = -U \qquad d'' = -V. \tag{4}$$

Dann geht die Gleichung für f über in:

$$f \cdot \frac{\partial^2 \log f}{\partial u \partial v} = UV.$$

Es genügt ein particuläres Integral; ein solches ist

$$f = \frac{1}{2} UV(1 + uv)^2. \tag{5}$$

Durch die Gleichungen (3), (4), (5) sind die sechs Fundamentalgrössen der Minimalfläche bestimmt; aus ihnen erhält man für das Linienelement $ds^2 = 2f du dv$:

$$ds^2 = UV(1 + uv)^2 du dv, \tag{6}$$

für den Hauptkrümmungsradius $r = f : \sqrt{dd''}$:

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{UV}(1 + uv)^2; \tag{7}$$

ferner als Differentialgleichung der Krümmungslinien:

$$U du^2 - V dv^2 = 0 \tag{8}$$

und als Differentialgleichung der Asymptotenlinien:

$$U du^2 + V dv^2 = 0. \tag{9}$$

Die Krümmungslinien und Asymptotenlinien sind also durch Quadraturen bestimmt[1]).

Aus der Form von (8) und (9) und der Differentialgleichungen $du = 0$, $dv = 0$ der Minimallinien ergibt sich, dass auch für eine in beliebigen Parametern gegebene Minimalfläche die Differentialgleichungen der Minimallinien, der Krümmungslinien und der Asymptotencurven durch Quadraturen integrirbar sind[2]).

1) Roberts, Journ. d. Math. t. XI. p. 300 (1846).

2) Derselbe Satz gilt nach den Gleichungen des § 9 für Flächen von constanter mittlerer Krümmung, während für die Flächen von constantem Krümmungsmaass nur die Differentialgleichungen der Krümmungslinien und Asymptotenlinien, für die Flächen mit isometrischen Krümmungslinien nur diese und die Minimallinien durch Quadraturen bestimmbar sind. Die gemeinsame Quelle dieser und ähnlicher Sätze ist der folgende aus der Theorie des Multiplicators leicht zu beweisende Satz von Lie: Weiss man von drei gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung in (x, y), dass ihre Integrale $X = \alpha$, $Y = \beta$, $Z = \gamma$ (wo α, β, γ die Integrationsconstanten) eine lineare Relation mit constantem Coefficienten $Z \equiv \lambda X + \mu Y$ besteht, so lassen sich die drei Differentialgleichungen durch Quadraturen integriren. Vgl. Lie-Scheffers, Vorlesungen über Differentialgleichungen. Leipzig, Teubner. p. 163, sowie p. 169 ff. (1891).

Es ist nunmehr das simultane System (2) § 7 zu integriren. Dasselbe lautet in unserem Falle:

$$\frac{\partial a}{\partial u} = \frac{2a_2}{(1+uv)^2 V} \qquad \frac{\partial a_1}{\partial u} = -Ua + \left(\frac{2v}{1+uv} + \frac{U'}{U}\right) a_1$$

$$\frac{\partial a}{\partial v} = \frac{2a_1}{(1+uv)^2 U} \qquad \frac{\partial a_2}{\partial v} = -Va + \left(\frac{2u}{1+uv} + \frac{V'}{V}\right) a_2,$$

während $\frac{\partial a_2}{\partial u} = \frac{\partial a_1}{\partial v} = 0$ wird. Man erhält leicht drei Systeme von particulären Integralen a, a_1, a_2, deren Determinante nicht verschwindet, nämlich nach den Bezeichnungen des § 8:

$$\begin{array}{lll} x_0 = \frac{2u}{1+uv} & y_0 = \frac{2v}{1+uv} & z_0 = \frac{uv-1}{1+uv} \\ x_1 = -u^2 U & y_1 = U & z_1 = uU \\ x_2 = V & y_2 = -v^2 V & z_2 = vV. \end{array}$$

Hieraus folgt:

$$M_{11} = M_{22} = M_{23} = M_{31} = 0 \qquad M_{33} = 1 \qquad M_{12} = 2$$

und als Gleichung der Fläche zweiter Ordnung (8) § 8:

$$4\xi\eta + \zeta^2 = 1.$$

Die Coefficienten (ξ_i, η_i, ζ_i) sind aus den zugehörigen Gleichungen

$$4\xi_i\eta_i + \zeta_i^2 = 1 \qquad 2(\xi_i\eta_k + \eta_i\xi_k) + \zeta_i\zeta_k = 0$$

zu bestimmen. Das Werthsystem (oder diejenige Lage der Fläche im Raum), das der Weierstrass'schen Form entspricht, ist

$$\xi_0 = \eta_0 = \frac{1}{2}; \quad \xi_1 = -\frac{i}{2}; \quad \eta_1 = \frac{i}{2}; \quad \xi_2 = 1; \quad \zeta_0 = \zeta_1 = \xi_2 = \eta_2 = 0.$$

Hierdurch werden die Gleichungen (4) § 8:

$$\begin{array}{lll} a = \frac{u+v}{1+uv} & b = i\frac{v-u}{1+uv} & c = \frac{uv-1}{1+uv} \\ a_1 = \frac{1}{2}(1-u^2)U & b_1 = \frac{i}{2}(1+u^2)U & c_1 = uU \\ a_2 = \frac{1}{2}(1-v^2)V & b_2 = -\frac{i}{2}(1+v^2)V & c_2 = vV. \end{array} \tag{10}$$

Setzt man noch

$$U = F(u) \qquad V = \Phi(v), \tag{11}$$

so erhält man schliesslich nach (11) § 8 die Gleichungen der Minimalfläche in der Form[1]):

---

1) Weierstrass, l. c. p. 619. Setzt man:
$\sqrt{2U}du = d\alpha$ $\sqrt{2V}dv = d\beta$ $u = A(\alpha)$ $v = B(\beta)$, also $U = \frac{1}{2A'^2}$; $V = \frac{1}{2B'^2}$, so erhält man die Gleichungen von Enneper, l. c. p. 107.

$$x = \frac{1}{2}\int(1-u^2)\,F(u)du + \frac{1}{2}\int(1-v^2)\,\Phi(v)dv$$
$$y = \frac{i}{2}\int(1+u^2)\,F(u)du - \frac{i}{2}\int(1+v^2)\,\Phi(v)dv \qquad (12)$$
$$z = \int u\,F(u)du + \int v\,\Phi(v)dv.$$

Für:

$$U = f''(u) \qquad V = \varphi'''(v) \qquad (13)$$

erhält man statt (12):

$$x = \frac{1}{2}(1-u^2)f''(u) + uf'(u) - f(u) + \frac{1}{2}(1-v^2)\varphi''(v) + v\varphi'(v) - \varphi(v)$$
$$y = \frac{i}{2}(1+u^2)f''(u) - iuf'(u) + if(u) - \frac{i}{2}(1+v^2)\varphi''(v) + iv\varphi'(v) - i\varphi(v) \qquad (14)$$
$$z = uf''(u) - f'(u) + v\varphi''(v) - \varphi'(v).$$

Die vorstehende Herleitung der Gleichung der Minimalfläche ist rein analytisch. Man kann die Lösung abkürzen, indem man den oben bewiesenen geometrischen Satz benutzt, dass für Minimalflächen die sphärische Abbildung der Minimallinien wieder Minimallinien auf der Kugel ergibt. Nun stellen sich die Coordinaten (a, b, c) eines Punktes der Kugel vom Radius 1 in den zu den Minimallinien gehörigen Parametern (u, v) nach (15) § 3 durch die Ausdrücke (10) dar. Trägt man diese Werthe, sowie die Werthe (3), (4), (5) in die Gleichungen (6) § 2 ein, so erhält man durch Quadratur die Gleichungen (12).

Den kürzesten Weg, zur Gleichung der Minimalfläche zu gelangen, hat Monge[1]) angegeben. Es ist die Gleichung (1) zu befriedigen oder, wenn man wieder die Minimallinien zu Parametercurven wählt, die Gleichungen $e = g = 0$; $d' = 0$. Durch Anwendung derselben geht die mittlere der Gleichungen (9) § 2 über in:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = 0 \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} = 0 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} = 0. \qquad (15)$$

Daher ist

$$x = U_1 + V_1 \qquad y = U_2 + V_2 \qquad z = U_3 + V_3. \qquad (16)$$

Hierdurch wird der Gleichung $d' = 0$ genügt. Die Gleichungen $e = 0$, $g = 0$ geben dann für die Functionen U und V in (16) die Bedingungen:

$$U_1'^2 + U_2'^2 + U_3'^2 = 0 \qquad V_1'^2 + V_2'^2 + V_3'^2 = 0. \qquad (17)$$

Man kann nun für x und y die in (12) gegebenen Werthe ansetzen und erhält dann aus (17) auch für z den in (12) angegebenen

1) Monge-Liouville, Applications. p. 211 ff.

Werth. Für das Linienelement ds der Fläche folgt aus (16) und (17)

$$ds^2 = 2(dU_1 dV_1 + dU_2 dV_2 + dU_3 dV_3). \tag{18}$$

Die Gleichungen (16) und (17) enthalten den Satz:

Die allgemeine Minimalfläche wird erzeugt durch Translation einer Minimalcurve des einen Systems längs einer Minimalcurve des andern Systems.

Dieser Satz bildet die Grundlage von weiteren wichtigen Untersuchungen über den Grad und die Klasse von algebraischen Minimalflächen und die Bestimmung solcher Flächen durch gegegebene Elemente. Wir verweisen für diese Theorie auf die Literatur[1]).

Die folgenden Betrachtungen knüpfen an die Weierstrass'sche Form (12) oder (14) der Minimalfläche an. Diese Gleichungen stellen, indem man für F und Φ oder f und φ beliebige Functionen wählt, alle nur möglichen Minimalflächen dar; alle diese Flächen sind durch die Parameter (u, v) so aufeinander bezogen, dass sie in entsprechenden Punkten (u, v) parallele Normalen haben (Gl. 10). Die Minimalfläche (12) oder (14) ist immer und nur dann reell, wenn u und v complex conjugirte Variabeln sind und wenn F und Φ oder f und φ conjugirte Functionen sind, so dass zu jeder Function $F(u)$ oder $f(u)$ der complexen Variabeln u eine bestimmte reelle Minimalfläche gehört[2]).

Unter dieser Voraussetzung schreibt man die Gleichungen (12) zweckmässig[3])

$$\begin{gathered} x = \Re\int(1-u^2)\,F(u)du \qquad y = \Re\int i(1+u^2)\,F(u)du \\ z = \Re\int 2u\,F(u)du, \end{gathered} \tag{19}$$

wo der vorgesetzte Buchstabe $\Re$ bedeutet, dass der reelle Theil der nachfolgenden complexen Grösse genommen werden soll.

Man kann ferner zeigen, dass die Minimalfläche dann und nur dann algebraisch ist, wenn die Function f in (14) eine algebraische Function ist[4]). Eine algebraische Minimalfläche hat zugleich nach (8) und (9) algebraische Krümmungslinien und Asymptotenlinien, wenn $\int f'''(u)du$ und $\int \varphi'''(v)dv$ algebraische Functionen von u und v sind.

1) Lie, Arch. for Math. II. p. 295 (1877); Math. Ann. Bd. 14. p. 331 (1878) u. Bd. 15. p. 465 (1879). Darboux, Leçons. I. Liv. III. Chap. VI—IX.

2) Bonnet, Comptes rendus. T. 37. p. 529 (1853).

3) Weierstrass, l. c. p. 619.

4) Weierstrass, l. c. p. 621.

Die Gleichungen (12) oder (14) geben die allgemeine Minimalfläche in Punktcoordinaten (x, y, z). Aus ihnen erhält man die Gleichung der Fläche in Ebenencoordinaten (X, Y, Z, T) nach den Formeln des § 11. Nach (10) ist

$$X = \frac{u+v}{1+uv} \qquad Y = i\,\frac{v-u}{1+uv} \qquad Z = \frac{uv-1}{1+uv}. \tag{20}$$

Um T in (u, v) zu bilden, hat man die Werthe (20) und (12) oder (14) in

$$T = xX + yY + zZ$$

einzutragen. Man erhält so[1]):

$$(1+uv)\,T = \int^{u}(u-u_1)(1+u_1 v)\,F(u_1)\,du_1 + \int^{v}(v-v_1)(1+uv_1)\,\Phi(v_1)\,dv_1$$

oder

$$T = f'(u) + \varphi'(v) - \frac{2uv}{1+uv}\left(\frac{f(u)}{u} + \frac{\varphi(v)}{v}\right). \tag{21}$$

Dieser Ausdruck ist zugleich das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung

$$T_{12} + \frac{2}{(1+uv)^2}\,T = 0,$$

die man aus der mittleren Gleichung (20) § 11 erhält für die Werthe (20) von X, Y, Z und die aus $e = g = 0$, $h = 0$, $d' = 0$ sich ergebenden Werthe $E = G = 0$, $P' = Q' = 0$.

Durch Elimination von (u, v) aus (20) und (21) erhält man die Gleichung der Minimalfläche in den Ebenencoordinaten (X, Y, Z, T) allein. Es ist

$$u = \frac{X+iY}{1-Z} \qquad v = \frac{X-iY}{1-Z} \tag{22}$$

und hiernach

$$T = f'\left(\tfrac{X+iY}{1-Z}\right) + \varphi'\left(\tfrac{X-iY}{1-Z}\right) - (X-iY)\,f\left(\tfrac{X+iY}{1-Z}\right) - (X+iY)\,\varphi\left(\tfrac{X-iY}{1-Z}\right).$$

Ist die Fläche reell, sind also f und φ conjugirte Functionen, so kann man dieser Gleichung eine reelle Form geben. Setzt man nämlich:

$$f(u) = f\left(\tfrac{X+iY}{1-Z}\right) = P + iQ \qquad \varphi(v) = \varphi\left(\tfrac{X-iY}{1-Z}\right) = P - iQ,$$

so folgt:

$$P = \tfrac{1}{2}\,[f(u) + \varphi(v)] \qquad \frac{\partial P}{\partial X} = \frac{f'(u) + \varphi'(v)}{2(1-Z)}$$

und es wird

$$T = 2(1-Z)\frac{\partial P}{\partial X} - 2(XP + YQ). \tag{23}$$

---

1) Weierstrass, l. c. p. 623.

So erhält man z. B. für $f(u) = u^3$

$$T = \frac{2(2-Z)(X^2-Y^2)}{(1-Z)^2}.$$

Es sollen nunmehr einige specielle Minimalflächen, die von Interesse sind, namhaft gemacht werden. Setzt man in (12)

$$(24)\quad u = re^{i\varphi} \qquad v = re^{-i\varphi} \qquad F(u) = e^{i\alpha}u^{-2} \qquad \Phi(v) = e^{-i\alpha}v^{-2},$$

wo r, φ, α reelle Grössen bedeuten, so erhält man bei passender Constantenbestimmung durch eine leichte Rechnung die Fläche:

$$(25)\quad \begin{aligned} -x &= r\cos(\varphi+\alpha) + r^{-1}\cos(\varphi-\alpha) \\ -y &= r\sin(\varphi+\alpha) + r^{-1}\sin(\varphi-\alpha) \\ z &= 2\log r\cos\alpha - 2\varphi\sin\alpha. \end{aligned}$$

Setzt man $\alpha = 0$ und kehrt das Zeichen von x und y um, so hat man die Fläche:

$$(26)\quad x = (r + r^{-1})\cos\varphi \qquad y = (r + r^{-1})\sin\varphi \qquad z = 2\log r$$

oder

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r + r^{-1} = e^{\frac{z}{2}} + e^{-\frac{z}{2}}.$$

Setzt man dagegen $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und kehrt das Zeichen von y und z um, so erhält man die Fläche:

$$(27)\quad x = (r - r^{-1})\cos\varphi \qquad y = (r - r^{-1})\sin\varphi \qquad z = 2\varphi$$

oder

$$z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}.$$

Die Gleichungen (25) stellen eine Schraubenfläche[1]), die Gleichungen (26) eine Rotationsfläche (das Katenoid)[2]), die Gleichungen (27) eine Regelfläche (die flachgängige Schraubenfläche)[3]) dar. Diese Flächen sind auf einander abwickelbar, da für die Werthe (24) der Ausdruck (6) übergeht in

$$ds^2 = r^{-4}(dr^2 + r^2 d\varphi^2),$$

also das Linienelement unabhängig von α oder für die drei Flächen (25), (26), (27) dasselbe wird.

1) Scherk, Journ. für Math. Bd. 13. p. 185 (1835).
2) u. 3) Meunier, Sav. Etr. T. X. p. 477 (1785).

Man überzeugt sich leicht, dass die Gleichungen (25), (26), (27) die einzigen Schraubenflächen, Rotationsflächen und Regelflächen[1]) darstellen, die zugleich Minimalflächen sind. Wir zeigen dies kurz für die Rotationsflächen. Die allgemeine Rotationsfläche hat die Gleichung

$$x = \varrho \cos\psi \qquad y = \varrho \sin\psi \qquad z = P,$$

wo P eine beliebige Function von ϱ ist. Bezeichnet man durch P' und P'' die erste und zweite Ableitung von P, so erhält man für die mittlere Krümmung h und das Krümmungsmaass k die Werthe

$$h = \frac{\varrho P'' + P'(1+P'^2)}{\varrho(1+P'^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad k = \frac{P'P''}{\varrho(1+P'^2)^2}.$$

Die unter den Rotationsflächen befindlichen Minimalflächen sind daher bestimmt durch die Differentialgleichung ($h = 0$):

$$\varrho P'' + P'(1+P'^2) = 0.$$

Das erste Integral ist, wenn α die Integrationsconstante:

$$P' = \frac{-\alpha}{\sqrt{\varrho^2 - \alpha^2}}$$

und die zweite Integration gibt als Gleichung der Fläche:

$$z = P = -\alpha \log \frac{\varrho + \sqrt{\varrho^2 - \alpha^2}}{\alpha} \qquad \text{oder} \qquad \varrho = \frac{\alpha}{2}\left(e^{\frac{z}{\alpha}} + e^{-\frac{z}{\alpha}}\right).$$

Es sei ferner die Aufgabe:

Diejenigen Minimalflächen zu bestimmen, für welche die sphärische Darstellung der Krümmungslinien ein gegebenes System von isometrischen Linien auf der Kugel ist.

Nach (22) § 3 ist die Differentialgleichung des allgemeinsten Systems von isometrischen Linien auf der Kugel von der Form:

$$P(u)du^2 - Q(v)dv^2 = 0.$$

Andererseits ist die Differentialgleichung der Krümmungslinien der Minimalfläche nach (8):

$$Udu^2 - Vdv^2 = 0.$$

Sind daher P und Q gegeben, so bestimmen sich U und V aus den Gleichungen

$$U = P(u) \qquad V = Q(v). \tag{28}$$

Ein Beispiel hierzu bildet die Bestimmung der Minimalflächen, die zwei Schaaren von ebenen Krümmungslinien haben[2]).

---

1) Catalan, Journ. d. Math. T. VII. p 203 (1842).

2) Bonnet, Comptes rendus. T. 41. p. 1058 (1855).

Den beiden Schaaren von ebenen Krümmungslinien entsprechen auf der Kugel zwei zu einander orthogonale Systeme von Kleinkreisen, die von zwei Ebenenbüscheln ausgeschnitten werden, deren Axen reciproke Polaren der Kugel sind (vgl. § 11). Durch stereographische Projection bilden sich die beiden Kreisschaaren in der Ebene (ξ, η) ab als ein Kreisbüschel, das durch zwei feste Punkte geht und das zugehörige orthogonale Kreissystem. Man lege die beiden festen Punkte in die Punkte $+a$ und $-a$ auf der ξ-Axe. Dann ist die Gleichung des Kreisbüschels mit dem Parameter λ

$$\xi^2 + \eta^2 - a^2 = 2\lambda\xi. \tag{29}$$

Die Coordinaten (ξ, η) sind mit den Parametern (u, v) der Minimallinien der Kugel verbunden durch die Gleichungen (19) § 3:

$$u = \xi + i\eta \qquad v = \xi - i\eta. \tag{30}$$

Daher folgt aus (29), wenn man nach λ auflöst,

$$\frac{uv - a^2}{u + v} = \lambda$$

und es wird die Differentialgleichung des Kreisbüschels oder des ersten Systems von Kleinkreisen auf der Kugel:

$$\frac{du}{u^2 + a^2} + \frac{dv}{v^2 + a^2} = 0.$$

Hieraus erhält man als Differentialgleichung des zweiten orthogonalen Systems von Kleinkreisen, indem man $d\xi$, $d\eta$ durch $-d\eta$, $d\xi$ oder nach (30) du, dv durch idu und $-idv$ ersetzt:

$$\frac{du}{u^2 + a^2} - \frac{dv}{v^2 + a^2} = 0.$$

Das Product der beiden letzten Gleichungen ist die Differentialgleichung des gegebenen Systems von isometrischen Linien auf der Kugel. Die zugehörige Minimalfläche mit zwei Systemen von ebenen Krümmungslinien ist daher nach (28) bestimmt durch die Functionen

$$U = F(u) = \frac{1}{(u^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad V = \Phi(v) = \frac{1}{(v^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}}. \tag{31}$$

Von Interesse sind die Fälle $a = 0$ und $a = \infty$; beide Annahmen führen auf dieselbe Fläche[1]), wie leicht zu sehen. Für $a = \infty$ sind U und V gleich derselben reellen Constanten. Die Kreissysteme in der Ebene, die den Krümmungslinien der Minimalfläche entsprechen, werden nach (29) zu geraden Linien parallel den Axen ξ, η; daher sind ξ, η die Parameter der Krümmungslinien der Minimalfläche. Die

1) Enneper, Zeitschrift für Math. Bd. IX. p. 108 (1864) und Gött. Nachr. 1882. p. 40.

Fläche selber ist algebraisch und von der neunten Ordnung, die Krümmungslinien sind ebene Curven der dritten Ordnung. Setzt man $F(u) = \Phi(v) = 3$, bildet nach (12) x, y, z und führt statt u, v die Werthe ξ, η aus (30) ein, so erhält man

$$x = 3\xi + 3\xi\eta^2 - \xi^3 \qquad -y = 3\eta + 3\eta\xi^2 - \eta^3 \qquad z = 3\xi^2 - 3\eta^2. \quad (32)$$

Die Elimination von η oder ξ gibt als Gleichung der Ebenen, in welcher die Krümmungslinien $\xi = \alpha$ und $\eta = \beta$ liegen:

$$x + \xi z - 3\xi - 2\xi^3 = 0 \qquad y + \eta z + 3\eta + 2\eta^3 = 0.$$

An das Linienelement der Minimalfläche, das durch (6) bestimmt ist, schliessen sich weitere Betrachtungen über die conforme Abbildung und die Abwicklung der Minimalflächen auf andere Flächen an. Die conforme Abbildung auf die Kugel K wurde schon S. 62 erwähnt. Für die conforme Abbildung auf die Ebene hat man nur statt u und v zwei conjugirt conplexe Grössen $\xi_1 + i\eta_1$ und $\xi_1 - i\eta_1$ einzuführen und ξ_1, η_1 als rechtwinklige Coordinaten eines Punktes der Ebene zu betrachten.

Setzt man z. B., von der Differentialgleichung der Krümmungslinien (8) ausgehend,

$$\sqrt{U}du + \sqrt{V}dv = 2d\xi_1 \qquad \sqrt{U}du - \sqrt{V}dv = 2id\eta_1$$

oder

$$\sqrt{U}du = d\xi_1 + id\eta_1 \qquad \sqrt{V}dv = d\xi_1 - id\eta_1, \qquad (33)$$

so folgt aus (6) und (7)

$$ds^2 = \sqrt{UV}(1 + uv)^2 (d\xi_1^2 + d\eta_1^2) = 2r(d\xi_1^2 + d\eta_1^2), \qquad (33a)$$

womit eine conforme Abbildung der Minimalfläche erreicht ist, bei der den Krümmungslinien die Parallelen zu den Axen $\xi_1 = \alpha_1$, $\eta_1 = \beta_1$ und den Asymptotenlinien die Parallelen zu den Halbirungslinien der Axenwinkel $\xi_1 + \eta_1 = \gamma_1$, $\xi_1 - \eta_1 = \delta_1$ entsprechen.

Setzt man dagegen

$$u = \xi + i\eta \qquad v = \xi - i\eta, \qquad (34)$$

so folgt aus (6)

$$ds^2 = (1 + \xi^2 + \eta^2) F(\xi + i\eta)\, \Phi(\xi - i\eta)\, (d\xi^2 + d\eta^2) \qquad (34a)$$

und man hat eine conforme Abbildung der Minimalfläche auf die Ebene, bei welcher der dem Punkt (u, v) der Minimalfläche entsprechende Punkt (ξ, η) der Ebene sich ergibt, wenn man den sphärischen Bildpunkt von (u, v) stereographisch auf die Ebene projicirt (vgl. § 3).

Hieran knüpfen sich gewisse Abwicklungsaufgaben. Führt man statt der rechtwinkligen Coordinaten (ξ, η) der Ebene Polarcoordinaten (r, φ) ein, indem man setzt:

(35) $u = \xi + i\eta = re^{i\varphi} \quad v = \xi - i\eta = re^{-i\varphi} \quad uv = r^2 \quad u:v = e^{2i\varphi},$

so erhält man statt (34a):

(36) $$ds^2 = (1 + r^2) F(re^{i\varphi}) \Phi(re^{-i\varphi}) (dr^2 + r^2 d\varphi^2).$$

Für

(37) $$F(u) = Au^m \qquad \Phi(v) = Bv^m,$$

wo A, B beliebige, m eine reelle Constante, wird das Product $F(u)\Phi(v)$ von φ unabhängig und man erhält:

(38) $$ds^2 = AB(1 + r^2) r^{2m}(dr^2 + r^2 d\varphi^2).$$

Die Vergleichung dieses Ausdrucks mit (17) § 6 lehrt, dass die durch die Functionen (37) definirte Minimalfläche auf einer Rotationsfläche abwickelbar ist, die bestimmt ist durch die Gleichungen:

$$\frac{dr}{r} = \frac{\sqrt{1 + P^2}}{\varrho} d\varrho \qquad \sqrt{AB}(1 + r^2) r^{m+1} = \varrho.$$

Dabei entsprechen den Parallelkreisen der Rotationsfläche die Curven $uv = \text{const.}$ der Minimalfläche, d. h. die Curven, die bei der sphärischen Abbildung in Parallelkreise der Kugel übergehen und den Meridiancurven der Rotationsfläche die Curven $u:v = \text{const.}$ der Minimalfläche, d. h. die Curven, die bei der sphärischen Abbildung in Meridiane der Kugel übergehen.

Es lässt sich auch zeigen, dass die durch (37) bestimmten Minimalflächen die einzigen sind, die auf einer Rotationsfläche abwickelbar sind [1]).

Wir behandeln noch die Frage nach allen Minimalflächen, die sich auf einer gegebenen Minimalfläche abwickeln lassen [2]). Zu der gegebenen Fläche (12) bilde man eine zweite Fläche, indem man $x, y, z, u, v, F(u), \Phi(v)$ ersetzt durch $x_1, y_1, z_1, u_1, v_1, F_1(u_1), \Phi_1(v_1)$. Sollen beiden Flächen auf einander abwickelbar sein, so müssen sich u_1, v_1 als Functionen von u, v so bestimmen lassen, dass $ds = ds_1$ wird oder nach (6)

(39) $$(1 + uv)^2 F(u) \Phi(v) du dv = (1 + u_1 v_1)^2 F_1(u_1) \Phi_1(v_1) du_1 dv_1.$$

Setzt man aber

$$du_1 = \frac{\partial u_1}{\partial u} du + \frac{\partial u_1}{\partial v} dv \qquad dv_1 = \frac{\partial v_1}{\partial u} du + \frac{\partial v_1}{\partial v} dv,$$

1) Schwarz, Journ. für Math. Bd. 80. p. 295.

2) Bonnet, Comptes rendus. T. 37. p. 532 (1853). Darboux, Leçons. I. p. 334.

so gibt die Gleichung (39) die Bedingungen $\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial u} = \frac{\partial u_1}{\partial v}\frac{\partial v_1}{\partial v} = 0$, woraus folgt, dass u_1 Function von u, v_1 Function von v ist, oder umgekehrt v_1 Function von u, u_1 Function von v. Wir setzen $u_1 = \lambda(u)$, $v_1 = \mu(v)$. Die Functionen λ und μ sind dann zu bestimmen aus:

$$(1 + uv)^2 F(u)\,\Phi(v) = (1 + \lambda\mu)^2 F_1(\lambda)\,\Phi_1(\mu)\,\lambda'\mu'.$$

Nimmt man den Logarithmus und bildet die zweite Ableitung nach u und v, so folgt:

$$\frac{1}{(1+uv)^2} = \frac{\lambda'\mu'}{(1+\lambda\mu)^2} \quad \text{oder} \quad \frac{4\,du\,dv}{(1+uv)^2} = \frac{4\,du_1\,dv_1}{(1+u_1v_1)^2}. \tag{40}$$

Diese Gleichung sagt aus, dass die den Linienelementen ds und ds_1 der beiden Minimalflächen entsprechenden sphärischen Bilder dS und dS_1 einander gleich sind oder dass die sphärischen Bilder von zwei entsprechenden Figuren auf den beiden Minimalflächen entweder gleich oder symmetrisch sind. Sie müssen hier gleich sein, da wir u_1 als Function von u, v_1 als Function von v genommen haben und da sich durch continuirliche Aenderung der Coefficienten von λ und μ u_1 in u und v_1 in v muss überführen lassen. Durch passende Orientirung oder Verlegung der zweiten Fläche kann man $u_1 = u$, $v_1 = v$ machen. Man erhält dann aus (39) die Bedingung

$$F(u)\,\Phi(v) = F_1(u)\,\Phi_1(v),$$

der sich nur genügen lässt, indem man

$$F_1(u) = e^{i\alpha}F(u) \qquad \Phi_1(v) = e^{-i\alpha}\,\Phi(v) \tag{41}$$

setzt, wo α eine beliebige Constante. Die so bestimmte zweite Fläche $(x_1y_1z_1)$ heisst eine associirte Fläche der ersten und, wenn $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ist, ihre adjungirte Fläche. Daher der Satz:

Die auf einer gegebenen Minimalfläche abwickelbaren Minimalflächen sind die ihr associirten Flächen.

Die constante Grösse α in (41) hat eine einfache geometrische Bedeutung; sie ist gleich dem Winkel ϑ, den zwei entsprechende Linienelemente ds und ds_1 der beiden Minimalflächen mit einander bilden. Dieser Winkel ist also für je zwei entsprechende Elemente ds und ds_1 derselbe. In der That, bildet man aus (12) die Werthe von dx, dy, dz und mit Rücksicht auf (41) die zugehörigen Werthe von dx_1, dy_1, dz_1, so erhält man:

$$\cos\vartheta = \frac{dx\,dx_1 + dy\,dy_1 + dz\,dz_1}{ds\,ds_1} = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} = \cos\alpha, \tag{41a}$$

woraus $\vartheta = \alpha$ (q. e. d.).

Setzt man zur Abkürzung (vgl. (12) und (16)):

$$U_1 = \frac{1}{2}\int (1-u^2)\,F(u)\,du \qquad U_2 = \frac{i}{2}\int (1+u^2)\,F(u)\,du$$

$$U_3 = \int u\,F(u)\,du \tag{42}$$

$$V_1 = \frac{1}{2}\int (1-v^2)\,\Phi(v)\,dv \qquad V_2 = -\frac{i}{2}\int (1+v^2)\,\Phi(v)\,dv$$

$$V_3 = \int v\,\Phi(v)\,dv,$$

so hat man für einen Punkt (x, y, z) der ursprünglichen Fläche ($\alpha = 0$):

$$x = U_1 + V_1 \qquad y = U_2 + V_2 \qquad z = U_3 + V_3, \tag{43}$$

für einen Punkt (x_0, y_0, z_0) der adjungirten Fläche $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$:

$$x_0 = i(U_1 - V_1) \qquad y_0 = i(U_2 - V_2) \qquad z_0 = i(U_3 - V_3) \tag{44}$$

und für einen Punkt $(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha)$ der allgemeinen associirten Fläche:

$$x_\alpha = e^{i\alpha}U_1 + e^{-i\alpha}V_1 \qquad y_\alpha = e^{i\alpha}U_2 + e^{-i\alpha}V_2 \qquad z_\alpha = e^{i\alpha}U_3 + e^{-i\alpha}V_3 \tag{45}$$

oder

$$x_\alpha = x\cos\alpha + x_0\sin\alpha \qquad y_\alpha = y\cos\alpha + y_0\sin\alpha \qquad z_\alpha = z\cos\alpha + z_0\sin\alpha.$$

Ein Beispiel zu diesen drei auf einander abwickelbaren Minimalflächen bilden die auf S. 68 erwähnte Regelfläche, Rotationsfläche und Schraubenfläche.

Die Grösse α in (41) kann als ein variabeler Parameter aufgefasst werden; es ist daher möglich, Theile einer Minimalfläche auf stetige Weise so zu verbiegen, dass sie während der Biegung Minimalflächen bleiben. Da die durch die Functionen (37) definirten Minimalflächen auf einer Rotationsfläche abwickelbar sind, so lassen sie sich auch auf stetige Weise in sich selbst verbiegen; ein Beispiel hierzu bietet die Enneper'sche Fläche (32).

Hieran schliessen sich weitere Bemerkungen, die zur Bestimmung einer Minimalfläche durch eine auf ihr liegende Curve führen. Sind u und v conjugirt complexe Grössen und F und Φ conjugirte Functionen, so sind die Flächen (43) und (44) reell. Aus (43) und (44) folgt:

$$2U_1 = x - ix_0 \qquad 2U_2 = y - iy_0 \qquad 2U_3 = z - iz_0. \tag{46}$$

Ferner ist

$$X dx_0 + Y dy_0 + Z dz_0 = 0 \qquad dx\,dx_0 + dy\,dy_0 + dz\,dz_0 = 0,$$

(das letztere nach (41a)), folglich, wenn ϱ ein Proportionalitätsfactor:

$$\varrho dx_0 = Ydz - Zdy \quad \varrho dy_0 = Zdx - Xdz \quad \varrho dz_0 = Xdy - Ydx. \quad (47)$$

Der Factor ϱ ist $= +1$, wie die directe Bildung der beiden Seiten von (47) aus (43), (44) und (20) leicht ergibt. Daher hat man die Gleichungen:

$$2U_1 = x - i\int(Ydz - Zdy) \qquad 2U_2 = y - i\int(Zdx - Xdz)$$
$$2U_3 = z - i\int(Xdy - Ydx). \quad (48)$$

Diese Ausdrücke dienen zur Lösung der folgenden Aufgabe[1]):

Eine Minimalfläche zu bestimmen, die durch eine gegebene Curve geht und längs derselben gegebene Normalen (oder Tangentialebenen) hat.

Es seien für jeden Punkt der Curve die Coordinaten (x, y, z) und die Richtungscosinus (X, Y, Z) der Normale der gesuchten Fläche als analytische Functionen[2]) eines reellen Parameters t gegeben, so dass also die Gleichungen

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1 \qquad Xdx + Ydy + Zdz = 0 \quad (49)$$

identisch befriedigt sind. Durch die Gleichungen (48) sind alsdann die Functionen U_1, U_2, U_3 für die reellen Werthe von t eindeutig bestimmt bis auf additive Constanten, die nur die Lage der Fläche im Raum beeinflussen. Diese Functionen genügen nach (49) identisch den Gleichungen:

$$XdU_1 + YdU_2 + ZdU_3 = 0 \qquad dU_1^2 + dU_2^2 + dU_3^2 = 0. \quad (50)$$

Als analytische Functionen von t haben nun U_1, U_2, U_3 auch für alle complexen Werthe von t, welche t als Argument von x, y, z und X, Y, Z annehmen kann, eine bestimmte Bedeutung. Legt man daher der Variabelen t auch complexe Werthe bei, so stellen die Gleichungen:

$$x' = 2\Re(U_1) \qquad y' = 2\Re(U_2) \qquad z' = 2\Re(U_3) \quad (51)$$

eine Minimalfläche von der verlangten Beschaffenheit dar; sie geht nämlich durch die gegebene Curve und hat längs derselben die gegebenen Normalen, weil die mittels der complexen Werthe von t ge-

1) Gestellt von Björling, Archiv für Math. IV. p. 290 (1864). Gelöst von Bonnet, Comptes rendus. T. 40. p. 1107 (1855) und T. 42. p. 532 (1856). Die obige Lösung und die Gleichungen (48) gab Schwarz, Journ. für Math. Bd. 80. p. 291 (1875).

2) D. h. Functionen, die nach Potenzreihen entwickelbar und auf complexe t ausdehnbar sind.

bildeten Werthe von x', y', z' und X', Y', Z' für reelle t in die gegebenen Werthe x, y, z und X, Y, Z übergehen.

Die Bestimmung der Fläche ist eindeutig. Zugleich ergibt sich die Folgerung[1]):

Jede gerade Linie auf einer Minimalfläche ist eine Symmetrieaxe der Fläche.

Denn die zu beiden Seiten der Geraden befindlichen Flächentheile haben längs der Geraden dieselben Normalen. Dreht man also den einen Theil um die Gerade um 180°, so fallen seine Normalen mit denen des anderen Theils zusammen; mithin deckt sich auch der erste Theil mit dem zweiten. Aehnlich ergibt sich:

Jede Ebene, welche eine Minimalfläche längs einer Curve orthogonal schneidet, ist eine Symmetrieebene der Fläche.

Das Problem von Björling enthält folgende specielle Aufgaben[2]):

Eine Minimalfläche zu bestimmen von der gegeben sind entweder eine der geodätischen Linien oder eine der Asymptotenlinien oder eine der Krümmungslinien.

Denn in allen drei Fällen kennt man die Normalen der Fläche längs der gegebenen Curve. Dieselben sind im ersten Falle die Hauptnormalen, im zweiten Falle die Binormalen, im dritten Falle eines der Normalensysteme der Curve, die eine abwickelbare Fläche bilden.

Von hierhergehörigen Beispielen seien erwähnt:

Die Minimalfläche, für die eine Parabel geodätische Linie ist[3]), ferner:

Die Minimalflächen, für die eine vorgeschriebene algebraische Curve geodätische Linie ist mit Anwendnng auf Kegelschnitte und ihre Evoluten, Cycloide u. s. f.[4]).

Für den Fall der Ellipse z. B. erhält man eine transcendente Minimalfläche, auf der eine einfach unendliche Schaar von Raumcurven vierten Grades liegt, deren jede einen isolirten Doppelpunkt besitzt und deren sphärische Bilder confocale sphärische Kegelschnitte sind.

---

1) Weierstrass, vgl. Schwarz, Journ. für Math. Bd. 80. p. 292.

2) Bonnet, Comptes rendus. T. 42. p. 532 (1856).

3) Catalan, Comptes rendus. T. 41. p. 1019 (1855). Journ. Éc. Pol. Cah. 37. p. 160 (1858).

4) Schwarz, Journ. für Math. Bd. 80. p. 293 (1875). Herzog, Vierteljahrsschrift v. Wolf. Zürich. XX. p. 217 (1875). Henneberg, Diss. Zürich 1875 u. Zeitschr. v. Wolf. XXI. p. 17 (1875).

Wir besprechen noch kurz die allgemeinere Aufgabe:

Durch eine geschlossene (oder offene) Linie eine Minimalfläche zu legen, die im Innern einfach und stetig ist;

eine Aufgabe, die von Gergonne[1]) gestellt und deren mannigfache Lösungen von Plateau[2]) experimentell durch Lamellen von Glycerinseifenwasser zur Anschauung gebracht wurden.

Analytisch ist die Aufgabe bis jetzt nur gelöst für den Fall, dass die Fläche begrenzt ist durch geradlinige Polygone[3]) oder auch durch geradlinige Strecken und durch Ebenen, welche die Fläche orthogonal schneiden[4]). Da jede Gerade auf einer Fläche eine Asymptotenlinie ist, weil die Tangentialebenen der Fläche längs der Geraden Schmiegungsebenen der letzteren sind und da jede ebene Curve auf einer Fläche, deren Ebene die Fläche orthogonal schneidet, eine Krümmungslinie der Fläche ist, weil längs der Curve die auf einander folgenden Flächennormalen sich schneiden, so kann man die letzte Aufgabe auch so aussprechen:

Es ist eine Minimalfläche M zu bestimmen, die begrenzt ist zum Theil von ebenen Krümmungslinien, zum Theil von geraden Asymptotenlinien.

Wir deuten die Lösung dieser Aufgabe kurz an[5]). Die Minimalfläche M sei bezogen auf die Parameter (u, v) der Minimallinien und vorausgesetzt in der Form (19).

Die Fläche M werde erstens conform auf eine Ebene E_1 mit den Axen ξ_1, η_1 abgebildet durch die Gleichungen (33), also durch:

$$\sqrt{F(u)}du = d\xi_1 + i d\eta_1, \tag{52}$$

so dass also die Bilder der Krümmungslinien parallel den Axen ξ_1, η_1 und die Bilder der Asymptotenlinien parallel den Halbirungslinien der Winkel dieser Axen sind.

Die Fläche M werde zweitens conform abgebildet auf eine Kugel K vom Radius 1 um den Nullpunkt, wobei das Bild einer ebenen Krümmungslinie ein Grosskreis parallel der Ebene der Krümmungslinie

1) Gergonne, Ann. d. Math. pur. et appl. T. 7. p. 68 (1816).

2) Plateau, Statique expér. et théor. des liquides. Gand et Leipzig 1873.

3) Riemann, Ges. W. p. 283 u. 417 (1867). Weierstrass, Monatsber. d. Berl. Acad. 1866. p. 855.

4) Schwarz, Monatsber. d. Berl. Acad. 1865. p. 149 u. Bestimmung einer speciellen Minimalfläche. Berlin 1871.

5) Eine schöne und ausführliche Behandlung dieser Aufgaben findet sich in Darboux, Leçons. I. Liv. III. Chap. X—XIII.

und das Bild einer geraden Asymptotenlinie ein Grosskreis parallel der Normalebene der Asymptotenlinie wird; und die Kugel K werde dann stereographisch, also conform, auf eine Ebene E mit den Axen ξ, η abgebildet durch die Gleichungen (34), also durch:

$$u = \xi + i\eta, \tag{53}$$

wobei den Grosskreisen auf K gewisse Kreise in E entsprechen.

Hiernach ist das von Asymptotenlinien und Krümmungslinien begrenzte Stück der Minimalfläche M conform auf zwei verschiedene Ebenen E_1 und E abgebildet. Das Bild in der Ebene E_1 ist begrenzt durch gerade Linien von bestimmter Lage, das Bild in der Ebene E durch Kreise von bestimmter Lage. Die gesuchte Function $F(u)$ hängt nach (52) und (53) von den Punkten (ξ_1, η_1) und (ξ, η) in den Ebenen E_1 und E ab durch die Gleichung:

$$\sqrt{F(u)} = \frac{d\xi_1 + i d\eta_1}{d\xi + i d\eta}. \tag{54}$$

Man hat also nur noch $\xi_1 + i\eta_1$ als Function von $\xi + i\eta = u$ darzustellen. Dies kommt darauf hinaus, das Kreispolygon der Ebene E conform auf das geradlinige Polygon der Ebene E_1 abzubilden. Diese Aufgabe wird am einfachsten gelöst, indem man beide Polygone conform auf die obere Hälfte einer dritten Ebene E_0 mit den Axen ξ_0, η_0 abbildet, also $\xi + i\eta$ und $\xi_1 + i\eta_1$ durch dieselbe dritte Variabele $\xi_0 + i\eta_0$ darstellt, was durch Betrachtungen, die der Functionentheorie angehören, stets ausführbar ist.

Wir bestimmen, als einfachstes Beispiel zu dieser Lösung der Aufgabe, die Minimalfläche M, die durch zwei beliebige Gerade im Raum begrenzt wird.

Die Bilder der zwei Geraden von M auf der Kugel K sind zwei Grosskreise, die man als Meridiane ansehen kann (die Z-Axe ist die Polaxe) und von denen der eine, der Nullmeridian (die XZ-Ebene) mit der anderen den Winkel $\alpha\pi$ bilde. Daher sind die Bilder der zwei Geraden in der Ebene E wieder zwei Gerade, die durch den Nullpunkt gehen, den Winkel $\alpha\pi$ einschliessen und von denen die erste in die ξ-Axe fällt. Dagegen bilden sich die zwei Geraden der Fläche M in der Ebene E_1 ab als zwei Parallele, die mit der ξ_1-Axe den Winkel $\frac{\pi}{4}$ bilden. Man hat also einerseits den Sector der E-Ebene, andererseits den Parallelstreifen der E_1-Ebene conform auf die E_0-Ebene abzubilden. Das geschieht bekanntlich durch die Gleichungen

$$\xi + i\eta = (\xi_0 + i\eta_0)^{\alpha} \qquad e^{\frac{i\pi}{4}}(\xi_1 + i\eta_1) = C \cdot \log(\xi_0 + i\eta_0), \tag{55}$$

wie man auch leicht durch Einführung von Polarcoordinaten in den Ebenen E und E_0 verificirt. Man hat also nach (54), wenn $\xi + i\eta$ wieder durch u ersetzt wird:

$$\sqrt{F(u)} = \frac{C}{\alpha} e^{-\frac{i\pi}{4}} u^{-1} \quad \text{oder} \quad F(u) = iK \cdot u^{-2}, \qquad (56)$$

wo K eine reelle Constante. Durch Einführung dieser Function in (19) erhält man die gesuchte Fläche; sie ist, wie die Vergleichung von (56) mit (24) zeigt, identisch mit der flachgängigen Schraubenfläche, wie auch geometrisch vorauszusehen war. Die Constante K in (56) lässt sich bestimmen, wenn man den kürzesten Abstand der zwei Geraden auf der Minimalfläche kennt.

III. Untersuchung der allgemeinen Flächencurven.

§ 13. Die allgemeine Raumcurve.

Für die Untersuchung der Flächencurven schicken wir kurz die Definitionen und Gleichungen voraus, die für eine allgemeine Raumcurve gelten. Es seien[1]) (Fig. 1)

1. $A, B, C, D, ..$ auf einander folgende Punkte der Curve, $E, F, G, ..$ die Mittelpunkte der Bogenelemente $AB, BC, CD, ..$
2. $ABCM$ die Schmiegungsebene, MEK die Normalebene, AEK die rectificirende Ebene des Punktes E; $BCDM_1$, M_1FL und BFL die nämlichen Ebenen für den Punkt F.
3. ABC' die Tangente, EM die Hauptnormale (Normale in der Schmiegungsebene), EK die Binormale (Normale senkrecht zur Schmiegungsebene) des Punktes E. BC, FM_1 und FL die nämlichen Linien für den Punkt F.
4. M der Mittelpunkt und $AM = BM = CM$ der Radius des Krümmungskreises von E, d. h. des Kreises, der durch die drei Punkte A, B, C geht. M_1 und $BM_1 = CM_1 = DM_1$ dieselben Grössen für den Punkt F.

---

1) Clairaut, Recherches sur les courbes à double courbures. 1731.
Lancret, Mémoire sur les courbes à double courbures. Sav. étr. T. I. 1805.
Monge-Liouville, Applications. p. 392. 407. 418 ff. u. p. 547 (Note I).
Saint-Venant, Journ. Éc. Pol. Cah. 30 (1845), wo auch die ältere Literatur zusammengestellt ist.

5. N der Mittelpunkt und $NA = NB = NC = ND$ der Radius der osculirenden Kugel des Punktes E, d. h. der Kugel, die durch die vier Punkte A, B, C, D geht. Der Mittelpunkt N ist der Schnittpunkt von drei consecutiven Normalebenen in E, F, G.

6. MN die Krümmungsaxe (Polarlinie) des Punktes E, d. h. die Schnittlinie von zwei consecutiven Normalebenen in E und F; die Krümmungsaxe MN ist parallel der Binormale EK; der Punkt N Schnittpunkt der zwei consecutiven Krümmungsaxen in E und F.

7. $CBC_1 = AMB = EMF$ der Contingenzwinkel von E, d. h. der Winkel der zwei consecutiven Tangenten- oder Normalebenen von E und F.

8. MNM_1 der Torsionswinkel von E, d. h. der Winkel der zwei consecutiven Binormalen oder Krümmungsaxen oder Schmiegungsebenen der Punkte E und F.

Das Umhüllungsgebilde der Normalebenen oder der Ort der Krümmungsaxen ist eine abwickelbare Fläche, die Polarfläche der Raumcurve. Die Mittelpunkte der osculirenden Kugeln bilden die Rückkehrkante dieser Fläche.

Die Bezeichnungen dieser Grössen für einen Punkt (xyz) der Raumcurve seien folgende.

Die Cosinus der Neigungswinkel der drei Hauptrichtungen gegen die Coordinatenaxen seien:

α, β, γ für die Tangente,
l, m, n für die Hauptnormale,
λ, μ, ν für die Binormale.

Ferner sei:

ds das Bogenelement der Curve,
dt der Contingenzwinkel,
$d\tau$ der Torsionswinkel,
$d\sigma$ der Winkel zweier consecutiver Hauptnormalen,
$r = \frac{ds}{dt}$ der Krümmungsradius,
$\varrho = \frac{ds}{d\tau}$ der Torsionsradius,
R der Radius der osculirenden Kugel,
x', y', z' die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts,
X', Y', Z' die Coordinaten des Mittelpunkts der osculirenden Kugel.

Die Definition des Torsionsradius ϱ ist nur ein Analogon zu der des Krümmungsradius r; ein dem Krümmungskreis entsprechender Torsionskreis existirt nicht.

Um diese Grössen analytisch darzustellen[1]), seien die Coordinaten (x, y, z) eines Punktes der Curve als Functionen eines Parameters gegeben. Dann hat man für das Bogenelement ds im Punkt (x, y, z)

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \qquad ds d^2s = dx d^2x + dy d^2y + dz d^2z \tag{1}$$

und als Gleichung der Schmiegungsebene, wenn X, Y, Z laufende Coordinaten sind,

$$\begin{vmatrix} X - x & dx & d^2x \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

Ferner hat man

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1 \qquad & l\lambda + m\mu + n\nu &= 0 \\ l^2 + m^2 + n^2 &= 1 \qquad & \lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma &= 0 \\ \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 &= 1 \qquad & \alpha l + \beta m + \gamma n &= 0, \end{aligned} \tag{3}$$

folglich

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ l & m & n \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = \pm 1. \tag{4}$$

Unter der Voraussetzung, dass das $+$-Vorzeichen gewählt werde, dass also die positiven Richtungen der Tangente, der Hauptnormale und der Binormale dieselbe Lage zu einander haben, wie die positive x-, y- und z-Axe, hat man:

$$\alpha = m\nu - n\mu \qquad l = \mu\gamma - \nu\beta \qquad \lambda = \beta n - \gamma m, \tag{5}$$

nebst den entsprechenden Gleichungen für β, γ; m, n und μ, ν.

Wir berechnen zuerst die Grössen α, l, λ; es ist offenbar

$$\alpha = \frac{dx}{ds} \qquad \beta = \frac{dy}{ds} \qquad \gamma = \frac{dz}{ds}. \tag{6}$$

Ferner erhält man aus der Gleichung (2) der Schmiegungsebene, wenn r vorläufig einen Proportionalitätsfactor vorstellt,

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{r}{ds^3}(dy d^2z - dz d^2y) \qquad & \mu &= \frac{r}{ds^3}(dz d^2x - dx d^2z) \\ & & \nu &= \frac{r}{ds^3}(dx d^2y - dy d^2x) \end{aligned} \tag{7}$$

und aus (6) und (7) nach (5)

$$l = \frac{r}{ds^3}(ds d^2x - dx d^2s) = r\frac{d\alpha}{ds} \tag{8}$$

1) Frenet, Thèse. Toulouse 1847 und Journ. de Math. XVII. p. 437 (1852). J. A. Serret, Journ. de Math. XVI. p. 193 (1851).

nebst den entsprechenden Werthen für m, n. Der Factor r bestimmt sich wegen $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ nach (8) aus

$$\frac{1}{r^2} = \frac{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}{ds^2}. \tag{9}$$

Wir drücken zweitens $d\alpha, dl, d\lambda$ aus durch α, l, λ; nach (8) ist

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{l}{r} \qquad \frac{d\beta}{ds} = \frac{m}{r} \qquad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{n}{r}. \tag{10}$$

Ferner hat man nach (3) $\lambda d\lambda + \mu d\mu + \nu d\nu = 0$ und nach (3) und (10) $\alpha d\lambda + \beta d\mu + \gamma d\nu = 0$; daher mit Rücksicht auf (5)

$$d\lambda : d\mu : d\nu = l : m : n$$

oder, wenn ϱ vorläufig einen Proportionalitätsfactor vorstellt,

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{l}{\varrho} \qquad \frac{d\mu}{ds} = \frac{m}{\varrho} \qquad \frac{d\nu}{ds} = \frac{n}{\varrho}. \tag{11}$$

Endlich folgt aus der mittleren Gleichung (5), wenn man das Differential bildet und (10) und (11) benutzt,

$$\frac{dl}{ds} = \frac{1}{r}(n\mu - m\nu) + \frac{1}{\varrho}(m\gamma - n\beta)$$

oder nach (5)

$$\frac{dl}{ds} = -\left(\frac{\alpha}{r} + \frac{\lambda}{\varrho}\right) \qquad \frac{dm}{ds} = -\left(\frac{\beta}{r} + \frac{\mu}{\varrho}\right) \qquad \frac{dn}{ds} = -\left(\frac{\gamma}{r} + \frac{\nu}{\varrho}\right). \tag{12}$$

Der Factor ϱ ist nach (11) bestimmt durch die Gleichung

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2}{ds^2}. \tag{13}$$

Man überzeugt sich schliesslich leicht, dass die vorläufig als Proportionalitätsfactoren eingeführten Grössen r und ϱ nichts anderes sind als der Krümmungsradius und der Torsionsradius. Hierzu bestimmen wir die Werthe von dt und $d\tau$.

Für den Winkel v zweier Geraden, deren Winkel mit den Axen (a, b, c) und (a', b', c') sind, hat man bekanntlich

$$\cos v = \cos a \cos a' + \cos b \cos b' + \cos c \cos c'.$$

Hieraus folgt

$$4\sin^2\frac{v}{2} = (\cos a' - \cos a)^2 + (\cos b' - \cos b)^2 + (\cos c' - \cos c)^2.$$

Setzt man nun $a' = a + da$, also $\cos a' - \cos a = d\cos a$ und $4\sin^2\frac{v}{2} = dv^2$, so erhält man für den Winkel dv zweier Linien, deren Richtung unendlich wenig verschieden ist,

$$dv^2 = da^2 + db^2 + dc^2.$$

Dies angewandt auf die Tangente und die Binormale gibt

$$dt^2 = d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2 \qquad d\tau^2 = d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2. \tag{14}$$

Die Vergleichung mit (9) und (13) lehrt, dass in der That r mit dem Krümmungsradius, ϱ mit dem Torsionsradius identisch ist. Aus (12) folgt noch

$$d\sigma^2 = dl^2 + dm^2 + dn^2 = dt^2 + d\tau^2. \tag{15}$$

Für die Coordinaten (x', y', z') des Krümmungsmittelpunktes endlich hat man

$$x' = x + rl \qquad y' = y + rm \qquad z' = z + rn. \tag{16}$$

Die Gleichungen (6), (10), (11), (12) geben die Sätze:

Die höheren Differentiale der Coordinaten x, y, z eines Curvenpunktes lassen sich durch die neun Cosinus (α, β, γ), (l, m, n), (λ, μ, ν) darstellen in Verbindung mit den zwei Grössen r und ϱ und deren Differentialen.

Sind (α, β, γ) als Functionen der Bogenlänge s gegeben, so kann man die Werthe r und l, m, n aus (9) und (10) und die Werthe ϱ und λ, μ, ν aus (13) und (12) ableiten.

Es lässt sich ferner der Satz beweisen:

Eine Raumcurve ist (abgesehen von ihrer Lage im Raum) eindeutig bestimmt, wenn der Krümmungsradius r und der Torsionsradius ϱ als Function der Bogenlänge s gegeben sind.

Es bleibt noch der Radius R und der Mittelpunkt (X', Y', Z') der osculirenden Kugel im Punkt (x, y, z) zu bestimmen. Der Mittelpunkt ist als Schnittpunkt von drei consecutiven Normalebenen bestimmt durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} (X'-x)\,\alpha + (Y'-y)\,\beta + (Z'-z)\,\gamma &= 0 \\ (X'-x)\,l + (Y'-y)\,m + (Z'-z)\,n &= r \\ (X'-x)\,\lambda + (Y'-y)\,\mu + (Z'-z)\,\nu &= -\varrho\frac{dr}{ds}, \end{aligned} \tag{17}$$

von denen die beiden letzten unter Anwendung von (10) bis (12) durch ein- und zweimaliges Differentiiren der ersten Gleichung gebildet sind.

Durch Auflösen erhält man

$$X'-x = rl - \varrho\frac{dr}{ds}\lambda \qquad Y'-y = rm - \varrho\frac{dr}{ds}\mu \qquad Z'-z = rn - \varrho\frac{dr}{ds}\nu \tag{18}$$

und durch Quadriren und Addiren

$$R^2 = r^2 + \varrho^2\left(\frac{dr}{ds}\right)^2. \tag{19}$$

Die Gleichungen (18) stellen bei variabelem Parameter die Rückkehrkante C' der abwickelbaren Polarfläche der ursprünglichen Curve C dar. Es hat keine Schwierigkeit, für die Curve C' die den Grössen (α, β, γ), (l, m, n), (λ, μ, ν), r, ϱ, R entsprechenden Werthe aufzustellen und durch Vergleichung eine Reihe von Sätzen über den Zusammenhang der Curven C und C' abzuleiten, wie z. B. die Sätze:

Die Hauptnormalen der Curven C und C' in entsprechenden Punkten sind parallel.

Die Binormale einer jeden der beiden Curven C und C' ist parallel der Tangente der anderen.

Bezüglich der Evoluten einer Raumcurve[1]) verweisen wir auf anderweitige Darstellungen.

§ 14. Die allgemeine Flächencurve. Bestimmung der Radien.

Für die Untersuchung der allgemeinen Flächencurve sind die in den Gleichungen des § 13 auftretenden Radien r, ϱ, R und die Winkel (α, β, γ), (l, m, n), (λ, μ, ν) in den Parametern u, v und ihren Differentialen darzustellen. Bezeichnet man noch mit H den Winkel zwischen der Flächennormale und der Hauptnormale der Curve, so zeigt sich zunächst, dass die Radien r, ϱ, R und der Winkel H sich sehr einfach durch die vier Grössen ds^2, L, M, N ausdrücken lassen, die, gleich Null gesetzt, die wichtigsten besonderen Flächencurven darstellen[2]). Wir bezeichnen nämlich mit:

$ds^2 = 0$ die Differentialgleichung der Minimallinien,
$L = 0$ die Differentialgleichung der Asymptotenlinien,
$M = 0$ die Differentialgleichung der Krümmungslinien,
$N = 0$ die Differentialgleichung der geodätischen Linien.

Nach § 4 und § 5 ist:

$$(1) \qquad \begin{aligned} L &= a d^2x + b d^2y + c d^2z \\ M &= \begin{vmatrix} a & da & dx \end{vmatrix} \\ N &= \begin{vmatrix} a & dx & d^2x \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Die beiden letzten Formen lassen sich unmittelbar durch die Para-

1) Zuerst untersucht in Monge-Liouville, Applications. p. 396.

2) Die Form und die Beweise, die wir den folgenden Gleichungen geben, ermöglichen auch die Ausdehnung auf die Nicht-Euklidische Geometrie und auf Räume von höheren Dimensionen, die bis jetzt nur für einen Theil der Krümmungstheorie durchgeführt ist.

meter u, v und deren Differentiale ausdrücken, indem man sie multiplicirt mit dem Ausdruck (24) § 1:

$$\delta = \left| a \quad \frac{\partial x}{\partial u} \quad \frac{\partial x}{\partial v} \right| . \tag{2}$$

Man erhält so:

$$\begin{aligned} ds^2 &= edu^2 + 2fdudv + gdv^2 \\ L &= \mathfrak{d}du^2 + 2\mathfrak{d}'dudv + \mathfrak{d}''dv^2 \\ M &= \frac{1}{\delta}\begin{vmatrix} edu + fdv & \mathfrak{d}du + \mathfrak{d}'dv \\ fdu + gdv & \mathfrak{d}'du + \mathfrak{d}''dv \end{vmatrix} \\ N &= \frac{1}{\delta}\begin{vmatrix} edu + fdv & mdu^2 + 2m'dudv + m''dv^2 + ed^2u + fd^2v \\ fdu + gdv & ndu^2 + 2n'dudv + n''dv^2 + fd^2u + gd^2v \end{vmatrix} . \end{aligned} \tag{3}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\begin{aligned} N_1 &= pdu^2 + 2p'dudv + p''dv^2 + d^2u \\ N_2 &= qdu^2 + 2q'dudv + q''dv^2 + d^2v , \end{aligned} \tag{4}$$

so nimmt N die Form an

$$N = \delta(N_2du - N_1dv) \tag{5}$$

und das zweite Differential von x wird nach (9) § 2

$$d^2x = La + N_1\frac{\partial x}{\partial u} + N_2\frac{\partial x}{\partial v} . \tag{6}$$

Quadrirt man die mittlere Gleichung (1) und benutzt die Werthe (16) und (17) § 2, so folgt:

$$M^2 = \lambda Lds^2 - L^2 - kds^4 . \tag{7}$$

Multiplicirt man die Determinante $|da \;\; dx \;\; d^2x|$ mit (2), so erhält man

$$|da \;\; dx \;\; d^2x| = LM . \tag{8}$$

Endlich ist nach (1) wegen (4) § 2

$$MN = |a \;\; da \;\; dx| \cdot |a \;\; dx \;\; d^2x| = -ds\,(Ld^2s + ds\textstyle\sum dad^2x). \tag{9}$$

Nach diesen Vorbereitungen gehen wir an die Bestimmung der Radien r, ϱ, R und des Winkels H. Nach (7) und (8) § 13 ist (vgl. Fig. 2):

$$\begin{aligned} \cos H &= al + bm + cn = \frac{r}{ds^2}\sum ad^2x \\ \sin H &= a\lambda + b\mu + c\nu = \frac{r}{ds^3}|a \;\; dx \;\; d^2x| . \end{aligned} \tag{10}$$

Daher

$$\frac{\cos H}{r} = \frac{L}{ds^2} \qquad \frac{\sin H}{r} = \frac{N}{\partial s^3}. \quad (11)$$ [1]

Hieraus folgt für den Winkel H und für den Krümmungsradius r der Curve:

$$\operatorname{tg} H = \frac{N}{L\,ds} \qquad \frac{1}{r^2} = \frac{N^2 + L^2 ds^2}{ds^6}. \quad (12)$$

Differentiirt man die zweite Gleichung (10) und benutzt die Formeln (11) § 13, so erhält man

$$\cos H\, dH = \sum a\, d\lambda + \sum \lambda\, da = \frac{ds}{\varrho}\cos H + \frac{r}{ds^3}\,|da \;\; dx \;\; d^2x|.$$

Hieraus folgt mit Rücksicht auf (8) und (11) für den Torsionsradius ϱ die Formel[2]):

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{dH}{ds} - \frac{M}{ds^2}. \quad (13)$$

Der Ausdruck für dH, der aus (12) zu bilden ist, enthält ausser den ersten und zweiten auch noch die dritten Differentiale von u und v.

Um endlich den Osculationsradius R darzustellen, hat man nach (19) § 13 dr zu bilden. Differentiirt man die erste Gleichung (11), so erhält man zur Bestimmung von dr:

$$-\frac{\cos H}{r^2}\frac{dr}{ds} - \frac{\sin H}{r}\frac{dH}{ds} = \frac{1}{ds}\,d\left(\frac{L}{ds^2}\right) = \frac{dL}{ds^3} - \frac{2Ld^2s}{ds^4}. \quad (14)$$

Diese Gleichung lässt sich noch umformen[3]). Nach (11) und (13) ist wegen (9):

$$\frac{2\sin H}{r}\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{dH}{ds}\right) = -\frac{2MN}{ds^5} = \frac{2Ld^2s}{ds^4} + \frac{2\sum da\, d^2x}{ds^3}.$$

Addirt man dies zu (14), so folgt

$$\begin{aligned} &-\frac{\cos H}{r^2}\frac{dr}{ds} + \frac{\sin H}{r}\left(\frac{2}{\varrho} - 3\frac{dH}{ds}\right) \\ &= \frac{dL}{ds^3} + \frac{2\sum da\, d^2x}{ds^5} = \frac{1}{ds^5}\left(\sum da\, d^2x - \sum dx\, d^2a\right). \end{aligned} \quad (15)$$

Dieser Ausdruck, der mit P bezeichnet sei, wird in u und v und deren Differentialen dargestellt, von d^2u und d^2v ganz frei. Eine einfache Rechnung gibt für Pds^3 den Ausdruck:

$$\begin{aligned} Pds^3 &= \sum da\, d^2x - \sum dx\, d^2a \\ &= P_{30}du^3 + 3P_{21}du^2dv + 3P_{12}du dv^2 + P_{03}dv^3, \end{aligned} \quad (16)$$

1) Minding, Journal für Math. VI. p. 159 (1830).

2) Bonnet, Journ. Éc. Pol. Cah. 32. p. 14 (1848), wo die Gleichung zuerst für Krümmungslinien als Parametercurven angegeben ist. Darboux, Leçons. II. p. 357 u. 386 in anderer Form.

3) Laguerre, Bull. d. l. soc. philomatique. T. VII. p. 49 (1870). Darboux, Leçons. II. p. 395.

wo

$$P_{30} = \frac{\partial \boldsymbol{d}}{\partial u} - 2(p\boldsymbol{d} + q\boldsymbol{d}') \qquad P_{12} = \frac{\partial \boldsymbol{d}''}{\partial u} - 2(p'\boldsymbol{d}' + q'\boldsymbol{d}'')$$
$$P_{21} = \frac{\partial \boldsymbol{d}}{\partial v} - 2(p'\boldsymbol{d} + q'\boldsymbol{d}') \qquad P_{03} = \frac{\partial \boldsymbol{d}''}{\partial v} - 2(p''\boldsymbol{d}' + q''\boldsymbol{d}''). \tag{17}$$

Wendet man die Gleichung (15) auf einen Normalschnitt der Fläche an, setzt also $H = 0$, so reducirt sich die linke Seite von (15) auf $\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{r}\right)$, d. h.:

Die Differentialgleichung dritten Grades $P = 0$ (16) definirt diejenigen Curven auf der Fläche, für die in jedem Punkt der berührende Normalschnitt von seinem Krümmungskreis vierpunktig berührt wird[1]).

Hieran schliessen sich noch einige weitere Darstellungen[2]). Nach (17) und nach (6) § 7 lassen sich die partiellen Ableitungen von $\boldsymbol{d}, \boldsymbol{d}', \boldsymbol{d}''$ nach u, v ausdrücken durch e, f, g; $\boldsymbol{d}, \boldsymbol{d}', \boldsymbol{d}''$ und die vier Grössen $P_{30}, P_{21}, P_{12}, P_{03}$. Dies führt zu einer einfachen Darstellung der Ableitungen von h und k nach u und v. Differentiirt man nämlich die Gleichung $\delta^2 k = \boldsymbol{d}\boldsymbol{d}'' - \boldsymbol{d}'^2$ (17) § 2 nach u, so erhält man:

$$\delta^2 \frac{\partial k}{\partial u} + 2\delta k \frac{\partial \delta}{\partial u} = \boldsymbol{d}\frac{\partial \boldsymbol{d}''}{\partial u} + \boldsymbol{d}''\frac{\partial \boldsymbol{d}}{\partial u} - 2\boldsymbol{d}'\frac{\partial \boldsymbol{d}'}{\partial u}$$

oder nach (7a) § 1 und (6) § 7 und (17):

$$\delta^2 \frac{\partial k}{\partial u} = -2(p+q')(\boldsymbol{d}\boldsymbol{d}'' - \boldsymbol{d}'^2) - 2\boldsymbol{d}'(P_{21} + \boldsymbol{d}p' + \boldsymbol{d}'p + \boldsymbol{d}'q' + \boldsymbol{d}''q)$$
$$+ \boldsymbol{d}''(P_{30} + 2\boldsymbol{d}p + 2\boldsymbol{d}'q) + \boldsymbol{d}(P_{12} + 2\boldsymbol{d}'p' + 2\boldsymbol{d}''q')$$

oder

$$\delta^2 \frac{\partial k}{\partial u} = \boldsymbol{d}''P_{30} - 2\boldsymbol{d}'P_{21} + \boldsymbol{d}P_{12}) \qquad \delta^2 \frac{\partial k}{\partial v} = \boldsymbol{d}P_{03} - 2\boldsymbol{d}'P_{12} + \boldsymbol{d}''P_{21}. \tag{18}$$

In ähnlicher Weise findet man:

$$\delta^2 \frac{\partial h}{\partial u} = gP_{30} - 2fP_{21} + eP_{12} \qquad \delta^2 \frac{\partial h}{\partial v} = eP_{03} - 2fP_{12} + gP_{21}. \tag{19}$$

Die Gleichungen (18) und (19) lassen sich benutzen, um die quadratische Covariante der cubischen Form (16), nämlich:

$$\frac{1}{\delta^2}\begin{vmatrix} P_{30}du + P_{21}dv & P_{21}du + P_{12}dv \\ P_{21}du + P_{12}dv & P_{12}du + P_{03}dv \end{vmatrix} \tag{20}$$

allein durch den Krümmungsradius r_0 des zur Richtung $du:dv$ gehörigen Normalschnittes und die Hauptkrümmungsradien r_1 und r_2 darzustellen.

---

1) De la Gournerie, Journ. d. Math. T. XX. p. 145 (1855), wo diese Differentialgleichung zuerst für die Form $z = f(x, y)$ der Fläche aufgestellt ist. Vgl. Laguerre, l. c. u. Knoblauch, Journ. für Math. Bd. 103. p. 32 ff. Darboux, Leçons. II. p. 396.

2) Knoblauch, l. c.

Wir geben zum Schluss noch die bei Anwendungen häufig benutzten Werthe von ds^2, L, M, N oder von H, r, ϱ für die Parametercurven an. Versieht man die zu den Curven $v = \text{const.}$ und $u = \text{const.}$ gehörigen Elemente bezüglich mit dem unteren Index u und v, so ist:

$$(21)\qquad \begin{aligned} ds_u^2 &= e\,du^2 \qquad L_u = \mathfrak{d}\,du^2 \\ ds_v^2 &= g\,dv^2 \qquad L_v = \mathfrak{d}''dv^2, \end{aligned}$$

$$(22)\qquad \begin{aligned} \delta M_u &= (e\mathfrak{d}' - f\mathfrak{d})du^2 \qquad \delta N_u = (en - fm)\,du^3 = \delta^2 q\,du^3 \\ \delta M_v &= (f\mathfrak{d}' - g\mathfrak{d}')dv^2 \qquad \delta N_v = (fn'' - gm'')\,dv^3 = -\delta^2 p''dv^3, \end{aligned}$$

folglich:

$$(23)\qquad \frac{\sin H_u}{r_u} = \frac{N_u}{ds_u^3} = \frac{\delta q}{e^{\frac{3}{2}}} \qquad \frac{\sin H_v}{r_v} = \frac{N_v}{ds_v^3} = -\frac{\delta p''}{g^{\frac{3}{2}}}.$$

Sind die Parametercurven orthogonal, also $f = 0$, so hat man:

$$(23a)\qquad \frac{\sin H_u}{r_u} = -\frac{1}{\sqrt{eg}}\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v} \qquad \frac{\sin H_v}{r_v} = +\frac{1}{\sqrt{eg}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u}.$$

Sind die Parametercurven insbesondere Krümmungslinien, also $f = \mathfrak{d}' = 0$, so hat man ausser (23a) noch:

$$(24)\qquad \frac{\cos H_u}{r_u} = \frac{1}{r_1} \qquad \frac{\cos H_v}{r_v} = \frac{1}{r_2},$$

$$(25)\qquad \begin{aligned} \operatorname{tg} H_u &= -\frac{r_1}{\sqrt{eg}}\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v} = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} \\ \operatorname{tg} H_v &= +\frac{r_2}{\sqrt{eg}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u} = +\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} \end{aligned}$$

und

$$(26)\qquad \frac{1}{\varrho_u} = \frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial H_u}{\partial u} \qquad \frac{1}{\varrho_v} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial H_v}{\partial v}.$$

Aus (23a) beweist man leicht den Satz:

Sind zwei Systeme von Curven constanter geodätischer Krümmung zugleich orthogonal, so bilden sie ein isometrisches System, und andere ähnliche Sätze.

§ 15. Sätze über Flächencurven.

Aus den in § 14 entwickelten Formeln ergibt sich eine Reihe von allgemeinen Sätzen über Flächencurven[1]). Wir bedienen uns der üblichen Bezeichnung[2]) und nennen:

1) Vgl. Darboux, Leçons. Bd. II. Liv. V. Chap. III.

2) Die Erklärung der Bezeichnung „geodätische Torsion" folgt weiter unten, der Bezeichnung „geodätische Krümmung" in § 16.

$$\frac{1}{r} = \frac{\sqrt{N^2 + L^2 ds^2}}{ds^3} \quad \text{die (absolute) Krümmung,}$$

$$\frac{\cos H}{r} = \frac{L}{ds^2} \quad \text{die normale Krümmung,}$$

$$\frac{\sin H}{r} = \frac{N}{ds^2} \quad \text{die tangentiale oder geodätische Krümmung,} \qquad (1)$$

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{dH}{ds} - \frac{M}{ds^2} \quad \text{die (absolute) Torsion,}$$

$$\frac{1}{\bar{\varrho}} = -\frac{M}{ds^2} \quad \text{die geodätische Torsion.}$$

Für eine Curve, deren Schmiegungsebene die Fläche stets unter demselben Winkel schneidet, ist $H = \text{const.}$, für eine ebene Flächencurve ist $\varrho = \infty$, für eine sphärische $R = \text{const.}$ zu setzen. Ferner gilt Folgendes:

1. Ist die Flächencurve eine Asymptotenlinie und bezeichnet man für dieselbe $r, \varrho, \bar{\varrho}$ mit $r_a, \varrho_a, \bar{\varrho}_a$, so ist $L = 0$, $H = 90^0$ also, wenn $N \gtrless 0$:

$$\frac{1}{r_a} = \frac{N}{ds^2} \qquad \frac{1}{\varrho_a} = \frac{1}{\bar{\varrho}_a} = -\frac{M}{ds^2} \qquad \frac{1}{\varrho_a^2} = -\frac{1}{r_1 r_2}. \text{ [1]} \qquad (2)$$

Die letzte Gleichung ergibt sich so: da $L = 0$, folgt aus (7) § 14: $M^2 = -kds^4$, also:

$$\frac{1}{\varrho_a^2} = \frac{M^2}{ds^4} = -k = -\frac{1}{r_1 r_2}.$$

Die Gleichungen (2) geben die Sätze:

Für eine Asymptotenlinie ist die absolute Krümmung gleich der geodätischen Krümmung; beide sind bestimmt durch die erste Gleichung (2).

Für eine Asymptotenlinie ist die absolute Torsion gleich der geodätischen Torsion; das Quadrat derselben ist gleich dem negativen Krümmungsmaass der Fläche, also:

Auf einer Fläche von constantem Krümmungsmaass haben die Asymptotenlinien allenthalben dieselbe constante Torsion.

Für eine die Asymptotenlinie berührende Curve ist ebenfalls $L = 0$, also:

Entweder $H \gtrless 90^0$ und $r = \infty$, wie z. B. für alle ebenen Schnitte, welche die Asymptotenlinien berühren, ohne in die Tangentenebene zu fallen.

Man kann daher die Asymptotenlinien auch ansehen als die Curven,

1) Enneper, Nachr. d. K. G. d. W. zu Göttingen 1870. p. 499.

für welche jede sie berührende (aber von der Schnittcurve der Tangentenebene verschiedene) ebene Schnittcurve im Berührungspunkt eine Wendetangente hat.

Oder es ist $H = 90^0$ und r endlich. Im letzteren Falle haben M und P (16) § 14, da sie nur die ersten Differentiale du und dv enthalten, für die Asymptotenlinie und die sie berührende Curve dieselben Werthe. Nun ist für beide Curven $H = 90^0$, aber $dH:ds$ verschwindet nur für die Asymptotenlinie, daher folgt nach (1) und nach (15) § 14:

$$\frac{1}{\varrho} - \frac{dH}{ds} = \frac{1}{\varrho_a} \qquad \frac{1}{r}\left(\frac{2}{\varrho} - 3\frac{dH}{ds}\right) = \frac{2}{r_a \varrho_a}.$$

Die Elimination von $dH:ds$ liefert die Relation:

$$\frac{1}{\varrho} - \frac{3}{\varrho_a} = -\frac{2r}{r_a \varrho_a}. \tag{3}$$

Für die Schnittcurve der Tangentialebene mit der Fläche ist z. B. $\varrho = \infty$, also: $2r = 3r_a$ [1]).

2. Ist die Flächencurve eine geodätische Linie, so ist $N = 0$, $H = 0$, also, wenn $L \gtrless 0$:

$$\frac{1}{r} = \frac{L}{ds^2} \qquad \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\bar{\varrho}} = -\frac{M}{ds^2}. \tag{4}$$

D. h.: Für eine geodätische Linie ist die absolute Krümmung gleich der normalen Krümmung; beide sind bestimmt durch die erste Gleichung (4).

Ferner ist die geodätische Torsion einer beliebigen Curve gleich der absoluten Torsion der sie berührenden geodätischen Linie; dies war der Anlass zu der Bezeichnung „geodätische Torsion" für $1:\bar{\varrho}$ in (1).

3. Ist die Flächencurve eine Krümmungslinie, so ist $M = 0$, also $1:\bar{\varrho} = 0$, d. h. die geodätische Torsion einer Krümmungslinie ist $= 0$

und $dH = ds:\varrho = d\tau$, d. h. der Torsionswinkel einer Krümmungslinie ist gleich dem Differential des Winkels H zwischen der Flächennormale und der Hauptnormale der Curve [2]).

Weiter ergibt sich der Satz von Joachimsthal; zunächst seine Verallgemeinerung [3]):

Wenn die Schnittcurve zweier Flächen F_1 und F_2 für jede von ihnen eine Krümmungslinie ist, so ist längs derselben der Winkel beider Flächen constant.

1) Beltrami, Nouv. Ann. de Math. 2. sér. t. IV. p. 258 (1865).

2) Lancret, Mém. sur les lignes à double courbure. 1806.

3) Bonnet, Journ. Éc. Pol. Cah. 35. p. 119 (1853).

Es ist nämlich, da $M_1 = M_2 = 0$:

$$\frac{dH_1}{ds} - \frac{1}{\varrho} = 0 \qquad \frac{dH_2}{ds} - \frac{1}{\varrho} = 0$$

und da der Werth $1:\varrho$, d. h. die Torsion der Schnittcurve für beide Flächen derselbe ist, so folgt: $H_1 - H_2 = \text{const.}$ (q. e. d.).

Umgekehrt, wenn zwei Flächen F_1 und F_2 sich unter constantem Winkel schneiden, so ist die Schnittcurve, wenn sie Krümmungslinie der einen Fläche ist, auch Krümmungslinie der anderen.

Denn aus $dH_1 = dH_2$ folgt $M_1 = M_2$, d. h. wenn $M_1 = 0$, so ist auch $M_2 = 0$.

Speciell erhält man für ebene und sphärische Krümmungslinien die Sätze[1]):

Wenn eine Krümmungslinie eben oder sphärisch ist, so schneidet ihre Ebene oder Kugel die Fläche unter constantem Winkel; und umgekehrt:

Wenn eine Ebene oder Kugel eine Fläche unter constantem Winkel schneidet, so ist die Schnittcurve eine Krümmungslinie der Fläche; ferner:

Das sphärische Bild einer ebenen Krümmungslinie ist ein Kleinkreis, dessen Ebene parallel ist der Ebene der Krümmungslinie.

Endlich ergeben sich die Sätze über die Krümmungsradien. Betrachtet man eine beliebige Curve und den sie im Punkt (u, v) berührenden Normalschnitt, dessen normale Krümmung mit $1:r_0$ bezeichnet sei, so hat man, da für beide Curven L und ds gleich sind und für den Normalschnitt $H = 0$ ist:

$$\frac{1}{r_0} = \frac{\cos H}{r}. \tag{5}$$

Dies ist der Satz von Meunier[2]): Der Krümmungsradius einer beliebigen Curve ist gleich der Projection des Krümmungsradius des zugehörigen Normalschnitts auf die Schmiegungsebene der Curve.

Die normale Krümmung einer Curve im Punkt (u, v) ist nach (1):

$$\frac{1}{r_0} = \frac{d'du^2 + 2d'dudv + d''dv^2}{edu^2 + 2fdudv + gdv^2}. \tag{6}$$

Die Richtungen $du:dv$, für die r_0 ein Maximum oder Minimum wird[3]), bestimmen sich hiernach aus:

1) Joachimsthal, Journ. für Math. Bd. 30. p. 347 (1846).
2) Meunier, Mém. des Sav. étrangers. T. X. p. 477 (1785).
3) Dupin, Développements. p. 106.

$$(7)\qquad \begin{aligned} r_0(\mathfrak{d}du + \mathfrak{d}'dv) - (edu + fdv) &= 0 \\ r_0(\mathfrak{d}'du + \mathfrak{d}''dv) - (fdu + gdv) &= 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind identisch mit (9) § 5. Die Elimination von r_0 führt auf die Differentialgleichung der Krümmungslinien, die von $du : dv$ auf die Gleichung der Hauptkrümmungsradien. Hiernach sind die Krümmungslinien auch die Curven auf der Fläche, für welche die normale Krümmung zum Maximum oder Minimum wird.

Aus (6) ergibt sich ferner der Euler'sche Ausdruck für den Krümmungsradius r_0 eines beliebigen Normalschnittes durch die Hauptkrümmungsradien r_1 und r_2. Führt man als Parametercurven die Krümmungslinien ein, so dass $f = 0$, $\mathfrak{d}' = 0$ und bezeichnet durch ds_1 und ds_2 die Elemente der Krümmungslinien, durch ds das Element des Normalschnittes und durch Θ_1 den Winkel zwischen dem Normalschnitt und der Curve $v = \text{const.}$ oder zwischen ds und ds_1, so ist

$$ds_1 = \sqrt{e}\, du = ds \cos\Theta_1 \qquad ds_2 = \sqrt{g}\, dv = ds \sin\Theta_1 .$$

Daher nach (6)

$$\frac{1}{r_0} = \frac{\mathfrak{d}du^2 + \mathfrak{d}''dv^2}{ds^2} = \frac{\mathfrak{d}}{e}\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 + \frac{\mathfrak{d}''}{g}\left(\frac{ds_2}{ds}\right)^2$$

oder nach (5) § 9

$$(8)\qquad \frac{1}{r_0} = \frac{\cos^2\Theta_1}{r_1} + \frac{\sin^2\Theta_1}{r_2}.^{1})$$

4. Ist die Flächencurve gleichzeitig Krümmungslinie und geodätische Linie, so ist $M = 0$, $N = 0$, $H = 0$, $L \gtrless 0$; folglich:

$\varrho = \infty$, d. h. die Curve ist eben und liegt in einer Normalebene der Fläche.

Ist die Curve gleichzeitig Asymptotenlinie und geodätische Linie, so ist $L = 0$, $N = 0$, also:

$r = \infty$, d. h. die Fläche ist eine Regelfläche und die Curve eine der geradlinigen Erzeugenden.

Ist die Curve gleichzeitig Krümmungslinie und Asymptotenlinie, so ist $L = 0$, $M = 0$, $H = 90^0$, $\varrho = \bar{\varrho} = \infty$ und

$r_1 r_2 = \infty$, d. h. die Fläche ist eine abwickelbare Fläche und die Curve eine der Mantellinien.

Dasselbe gilt, wenn die Curve gleichzeitig Asymptotenlinie, Krümmungslinie und geodätische Linie ist.

1) Euler, Abh. d. Berl. Acad. 1760.

§ 16. Berechnung der Winkel. Anwendungen.

In § 14 sind für eine Flächencurve der Winkel H und die Radien r, ϱ, R durch die Parameter u, v dargestellt; es sollen jetzt ebenso die Cosinus (α, β, γ), (l, m, n), (λ, μ, ν) durch u, v ausgedrückt werden. Zunächst ist:

$$\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{ds}. \tag{1}$$

Es lassen sich aber gleichzeitig die drei Cosinus α, l, λ darstellen durch a, α_1, α_2 in Verbindung mit ω, H und zwei Hilfswinkeln Θ_1, Θ_2 und es sind alsdann nur noch Θ_1, Θ_2 durch u, v auszudrücken. Dabei bezeichnen:

Θ_1 und Θ_2 die Winkel, die bez. die Curven $v = \text{const.}$ und $u = \text{const.}$ mit der Flächencurve bilden, derart gemessen, dass:

$$\Theta_1 + \Theta_2 = \omega. \tag{2}$$

Wählt man in den Gleichungen (4) § 13 und (20) § 1, also in

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ l & m & n \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = \pm 1 \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \pm \sin\omega \tag{3}$$

wie früher beidemal das obere Zeichen, so ist der positive Sinn der sechs Richtungen in gewisser Weise festgelegt, so wie es Figur 2 angibt. Man erhält nun entweder auf analytischem Wege oder nach bekannten Sätzen der sphärischen Trigonometrie, wenn man zur Abkürzung: $\alpha a + \beta b + \gamma c = \sum \alpha a$ u. s. w. setzt, die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum \alpha a = 0 && \textstyle\sum l a = \cos H && \textstyle\sum \lambda a = \sin H \\
&\textstyle\sum \alpha \alpha_1 = \cos\Theta_1 && \textstyle\sum l\alpha_1 = -\sin H \sin\Theta_1 && \textstyle\sum \lambda \alpha_1 = \cos H \sin\Theta_1 \\
&\textstyle\sum \alpha \alpha_2 = \cos\Theta_2 && \textstyle\sum l\alpha_2 = \sin H \sin\Theta_2 && \textstyle\sum \lambda \alpha_2 = -\cos H \sin\Theta_2.
\end{aligned} \tag{4}$$

Löst man diese Gleichungen nach (α, β, γ), (l, m, n), (λ, μ, ν) auf, so folgen mit Rücksicht auf (2) und auf (21) § 1 für α, l, λ die Werthe:

$$\begin{aligned}
\alpha \sin\omega &= \alpha_1 \sin\Theta_2 + \alpha_2 \sin\Theta_1 \\
l \sin\omega &= a\cos H \sin\omega - \alpha_1 \sin H \cos\Theta_2 + \alpha_2 \sin H \cos\Theta_1 \\
\lambda \sin\omega &= a \sin H \sin\omega + \alpha_1 \cos H \cos\Theta_2 - \alpha_2 \cos H \cos\Theta_1.
\end{aligned} \tag{5}$$

Mit α, l, λ sind nach (10), (11) und (12) § 13 auch die Differentiale $d\alpha, dl, d\lambda$ durch u, v dargestellt. Es sind noch die Winkel Θ_1, Θ_2 auszudrücken; aus (1) und aus (22) § 1 folgt:

$$(6)\qquad \begin{aligned} \cos\Theta_1 &= \sum \alpha\alpha_1 = \frac{edu+fdv}{ds\sqrt{e}} \qquad \sin\Theta_1 = \frac{\delta dv}{ds\sqrt{e}}\ ^{1)} \\ \cos\Theta_2 &= \sum \alpha\alpha_2 = \frac{fdu+gdv}{ds\sqrt{g}} \qquad \sin\Theta_2 = \frac{\delta du}{ds\sqrt{g}}. \end{aligned}$$

Von Wichtigkeit sind auch die Differentiale $d\Theta_1$ und $d\Theta_2$. Differentiirt man die erste Gleichung (6), so folgt:

$$-\sin\Theta_1 d\Theta_1 = \sum \alpha d\alpha_1 + \sum \alpha_1 d\alpha.$$

Nach (10) § 13, nach (4) und nach (1) § 15 ist:

$$\sum \alpha_1 d\alpha = \frac{ds}{r}\sum \alpha_1 l = -\frac{\sin H \sin\Theta_1 ds}{r} = -\frac{N}{ds^2}\sin\Theta_1,$$

ferner nach (11) § 2 und nach (6):

$$\sum \alpha d\alpha_1 = -\frac{qdu+q'dv}{e}(f\cos\Theta_1 - \sqrt{eg}\cos\Theta_2) = \frac{\delta}{e}(qdu+q'dv)\sin\Theta_1.$$

Daher wird

$$(7)\qquad d\Theta_1 = -\frac{\delta}{e}(qdu+q'dv) + \frac{N}{ds^2}$$

und ebenso

$$d\Theta_2 = -\frac{\delta}{g}(p'du+p''dv) - \frac{N}{ds^2}.$$

Durch Addition dieser beiden Werthe folgt wieder die Gleichung (13) § 1.

Nach (5) § 14 erhält man aus (7):

$$(8)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial\Theta_1}{\partial u} &= -\frac{\delta q}{e} + \frac{\delta N_2}{ds^2} \qquad \frac{\partial\Theta_1}{\partial v} = -\frac{\delta q'}{e} - \frac{\delta N_1}{ds^2} \\ \frac{\partial\Theta_2}{du} &= -\frac{\delta p'}{g} - \frac{\delta N_2}{ds^2} \qquad \frac{\partial\Theta_2}{dv} = -\frac{\delta p''}{g} + \frac{\delta N_1}{ds^2}, \end{aligned}$$

Gleichungen, die später benutzt werden.

Wir geben ein paar Anwendungen der entwickelten Formeln.

Zuerst sei eine zweite Definition der geodätischen Krümmung[2]) einer Flächencurve erwähnt. (Gl. 1. § 15.) Bezeichnet man den Winkel $d\varepsilon$, den die beiden in den Endpunkten des Linienelements ds die Curve berührenden geodätischen Linien auf der Fläche mit einander bilden, als den geodätischen Contingenzwinkel der Curve, so gilt der Satz:

---

1) Gauss, Disq. gen. Art. 12.

2) Bonnet, Journ. Éc. Pol. Cah. 32. p. 42. Gl. (a) (1848). Monge-Liouville, Applications. Note II. p. 574.

Die geodätische Krümmung einer Flächencurve ist gleich dem geodätischen Contingenzwinkel $d\varepsilon$, dividirt durch das Linienelement ds.

Diese Eigenschaft gab den Anlass zu den Bezeichnungen „geodätische Krümmung" und „geodätischer Contingenzwinkel".

In der That: Θ_1 ist der Winkel, den die Curve $v = \text{const.}$ im Punkt (u, v) mit dem Linienelement ds der Flächencurve bildet, $\Theta_1 + d\Theta_1$ der entsprechende Winkel für das nächste Linienelement. Bezeichnet daher $\Theta_1 + d\Theta_1'$ den entsprechenden Winkel für die die Flächencurve berührende geodätische Linie, so folgt aus (7), da für eine geodätische Linie $N = 0$ ist:

$$d\Theta_1' = -\frac{\delta}{e}(q\,du + q'dv).$$

Subtrahirt man dies von (7), so erhält man für den geodätischen Contingenzwinkel $d\varepsilon$:

$$d\varepsilon = d\Theta_1 - d\Theta_1' = \frac{N}{ds^2} \quad \text{oder} \quad \frac{\sin H}{r} = \frac{d\varepsilon}{ds} \quad \text{(q. e. d.)}. \tag{9}$$

Eine zweite Anwendung bezieht sich auf die geodätischen Linien einer Fläche. Die Differentialgleichung derselben $N = 0$ ist von der zweiten Ordnung, lässt sich aber, wie Gauss[1]) gezeigt hat, in folgender Weise zerlegen. Für $N = 0$ erhält man aus (7) und (6):

$$\begin{aligned} d\Theta_1 &= -\frac{\delta}{e}(q\,du + q'dv) & \cos\Theta_1 &= \frac{e\,du + f\,dv}{ds\sqrt{e}} \\ d\Theta_2 &= -\frac{\delta}{g}(p'du + p''dv) & \cos\Theta_2 &= \frac{f\,du + g\,dv}{ds\sqrt{g}}. \end{aligned} \tag{10}$$

Das obere wie das untere Paar dieser Gleichungen ist äquivalent mit der Differentialgleichung der geodätischen Linien $N = 0$. Vereinigt man wieder die Gleichungen je eines Paares, so erhält man statt $N = 0$ die eine oder die andere der beiden Gleichungen[2]):

$$\begin{aligned} 2ds \cdot d\left(\frac{e\,du + f\,dv}{ds}\right) &= \frac{\partial e}{\partial u}du^2 + 2\frac{\partial f}{\partial u}du\,dv + \frac{\partial g}{\partial u}dv^2 \\ 2ds \cdot d\left(\frac{f\,du + g\,dv}{ds}\right) &= \frac{\partial e}{\partial v}du^2 + 2\frac{\partial f}{\partial v}du\,dv + \frac{\partial g}{\partial v}dv^2. \end{aligned} \tag{11}$$

Aus den Gleichungen (10) beweist man den Satz[3]):

Für Flächen, deren Linienelement die Form hat (Liouville'sche Form):

$$ds^2 = (U + V)(du^2 + dv^2), \tag{12}$$

1) Gauss, Disq. gen. Art. 18.

2) Darboux, Leçons. II. p. 405.

3) Monge-Liouville, Applications. Note III. p. 579.

wo U nur von u, V nur von v abhängt, ergibt sich die Gleichung und ebenso die Bogenlänge der geodätischen Linie durch blosse Quadratur.

Wählt man nämlich für u, v isometrische Coordinaten, so wird

(13) $e = g = \lambda \quad f = 0 \quad q = -\frac{1}{2\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial v} \quad q' = \frac{1}{2\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial u} \quad \Theta_1 + \Theta_2 = \frac{\pi}{2}.$

Daher folgt aus (10):

(14) $ds \cos \Theta_1 = \sqrt{\lambda}\, du \qquad ds \sin \Theta_1 = \sqrt{\lambda}\, dv \qquad \cos \Theta_1 dv = \sin \Theta_1 du$

und

(15) $$2\lambda d\Theta_1 = \frac{\partial \lambda}{\partial v} du - \frac{\partial \lambda}{\partial u} dv.$$

Multiplicirt man die letzte Gleichung mit $\sin \Theta_1 \cos \Theta_1$ und benutzt (14), so wird

(16) $$\lambda\, d(\sin^2 \Theta_1) = \cos^2 \Theta_1 \frac{\partial \lambda}{\partial v} dv - \sin^2 \Theta_1 \frac{\partial \lambda}{\partial u} du.$$

Ist nun, wie in (12) $\lambda = U + V$, so folgt aus (16), wenn U', V' die Ableitungen von U, V nach u, v:

$$U d(\sin^2 \Theta_1) + U' \sin^2 \Theta_1 du = V d(\cos^2 \Theta_1) + V' \cos^2 \Theta_1 dv$$

oder durch Integration:

(17) $$U \sin^2 \Theta_1 - V \cos^2 \Theta_1 = a,$$

wo a eine erste willkürliche Constante. Hiernach ist

(18) $$\cos^2 \Theta_1 = \frac{U - a}{U + V} \qquad \sin^2 \Theta_1 = \frac{V + a}{U + V}$$

oder nach (14)

$$\operatorname{tg} \Theta_1 = \frac{dv}{du} = \sqrt{\frac{V + a}{U - a}}.$$

Daher gibt eine zweite Quadratur die Differentialgleichung der geodätischen Linien für Flächen vom Charakter (12) in der Form:

(19) $$\int \frac{du}{\sqrt{U - a}} - \int \frac{dv}{\sqrt{V + a}} = b,$$

wo b die zweite willkürliche Constante ist. Die Bogenlänge der geodätischen Linien aber ist nach (14) und (18) durch

(20) $ds = \sqrt{\lambda}\,(\cos \Theta_1 du + \sin \Theta_1 dv) = \sqrt{U - a}\, du + \sqrt{V + a}\, dv,$

also ebenfalls durch Quadratur bestimmt.

Diese Integrationsmethode findet u. a. Anwendung bei den Flächen

zweiter Ordnung und bei den Rotationsflächen. Auf den letzteren hat man für das Linienelement (vgl. (17) § 6)

$$ds^2 = (1 + P'^2)\,d\varrho^2 + \varrho^2 dv^2 = U(du^2 + dv^2), \qquad (21)$$

wenn man

$$U = \varrho^2 \qquad \text{und} \qquad du = \sqrt{1 + P'^2}\,\frac{d\varrho}{\varrho}$$

setzt. Daher ist hier $V = 0$ und das erste Integral der Differentialgleichung der geodätischen Linie gibt nach (17) die Gleichung von Clairaut[1]):

$$\varrho \sin \Theta_1 = \text{const.} \qquad (22)$$

D. h.: Für alle Punkte einer geodätischen Linie der Rotationsfläche ist das Product aus dem Radiusvector ϱ in den Sinus des Azimuts Θ_1 constant.

Eine dritte Anwendung führt zu den Gauss'schen Sätzen über die Totalkrümmung eines Flächenstücks[2]). Bezeichnet man die sphärische Abbildung des Oberflächenelements do mit dO, so hat man nach (11) § 1: $do = \delta\,du\,dv$; $dO = \Delta\,du\,dv$, folglich nach (5) § 11:

$$\frac{dO}{do} = \frac{\Delta}{\delta} = k = \frac{1}{r_1 r_2}. \qquad (23)$$

Die sphärische Abbildung O eines endlichen Flächenstückes o heisst nach Gauss die Totalkrümmung desselben; nach (23) und nach (11) § 7 ist:

$$O = \int\int \frac{\delta\,du\,dv}{r_1 r_2} = \int\int \left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\delta q}{e}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\delta q'}{e}\right)\right] du\,dv \qquad (24)$$
$$= \int\int \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\delta p''}{g}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\delta p'}{g}\right)\right] du\,dv.$$

Nun lautet der Green'sche Satz, wenn zwei Functionen R und S von (u, v) in O eindeutig und stetig sind und Ableitungen besitzen:

$$\int\int \left(\frac{\partial S}{\partial u} - \frac{\partial R}{\partial v}\right) du\,dv = \int (R\,du + S\,dv),$$

wobei das Doppelintegral der linken Seite über die Fläche zu erstrecken ist, während das einfache Integral der rechten Seite die Umgrenzung von O durchläuft, so dass die Fläche zur Linken liegt.

Daher folgt nach (7):

$$O = -\int \frac{\delta}{e}(q\,du + q'\,dv) = \int d\Theta_1 - \int \frac{N}{ds^2} = \int d\Theta_1 - \int \frac{\sin H}{r}\,ds^{3})$$
$$O = +\int \frac{\delta}{g}(p'\,du + p''\,dv) = -\int d\Theta_2 - \int \frac{N}{ds^2} = -\int d\Theta_2 - \int \frac{\sin H}{r}\,ds. \qquad (25)$$

1) Clairaut, Recherches sur les courbes à double courbure. (1731.)

2) Gauss, Disq. gen. Art. 6.

3) Bonnet, Journ. Éc. Pol. Cah. 32. p. 124 ff. (1848). Darboux, Leçons. III. p. 126.

Hieraus erhält man den Gauss'schen Satz[1]) vom geodätischen Dreieck. Für die Seiten desselben ist $N = 0$; sind also A, B, C die Winkel des Dreiecks, so hat man aus (25):

$$(26)\quad O = \int d\Theta_1 = 2\pi - (\pi - A + \pi - B + \pi - C) = A + B + C - \pi.$$

§ 17. Umformungen. Differentialparameter. Anwendungen.

Bei der Herleitung der fundamentalen Formeln für eine Flächencurve (§ 14) war der Verlauf der Curve in der Nähe eines ihrer Punkte (u, v) bestimmt gedacht durch die ersten und zweiten Differentiale von u, v. Es soll jetzt die Flächencurve in der Form $\varphi(u, v) = a$ (wo a eine Constante) vorausgesetzt und die Gleichungen des § 14 demgemäss umgeformt werden. Man gelangt so u. a. auf die natürlichste Weise zu den als Differentialparameter bekannten Ausdrücken.

Setzt man zur Abkürzung:

$$(1)\qquad \frac{\partial \varphi}{\partial u} = \varphi_1 \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \varphi_2,$$

so lässt sich die Gleichung $d\varphi(u, v) = 0$, welche für die ersten Differentiale von u und v gilt, unter Anwendung eines Proportionalitätsfactors λ ersetzen durch:

$$(2)\qquad du = \lambda \varphi_2 \qquad dv = -\lambda \varphi_1.$$

Nach § 14 besteht unsere Aufgabe lediglich darin, die Ausdrücke für L, M, N, ds^2 zu bilden. Zunächst hat man für L und M

$$(3)\qquad \begin{aligned} L &= \lambda^2 (d\varphi_2^2 - 2d'\varphi_1\varphi_2 + d''\varphi_1^2) \\ M &= \frac{\lambda^2}{\delta}\,[(ed' - fd)\varphi_2^2 - (ed'' - gd)\,\varphi_1\varphi_2 + (fd'' - gd')\varphi_1^2]. \end{aligned}$$

Das Verschwinden dieser Ausdrücke ist die Bedingung dafür, dass das Curvensystem $\varphi = a$ mit dem Parameter a die eine Schaar der Asymptotenlinien oder der Krümmungslinien der Fläche darstellt.

Setzt man ferner zur Abkürzung[2]):

$$(4)\qquad \delta'(\varphi) = \frac{1}{\delta^2}\,[e\varphi_2^2 - 2f\varphi_1\varphi_2 + g\varphi_1^2]$$

$$(5)\qquad \delta'''(\varphi) = \frac{1}{\delta}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{g\varphi_1 - f\varphi_2}{\delta\sqrt{\delta'(\varphi)}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{e\varphi_2 - f\varphi_1}{\delta\sqrt{\delta'(\varphi)}}\right)\right],$$

1) Gauss, Disq. gen. Art. 20.

2) Vgl. für das Folgende: Beltrami, Giorn. di Mat. T. II u. III (1864 u. 1865). Math. Ann. Bd. I. p. 575 ff. (1869). Darboux, Leçons. III. Liv. VII. Chap. I.

so erhält man für ds^2 und N:

$$ds^2 = \lambda^2\delta^2 \cdot \delta'(\varphi) \qquad N = -\lambda^3\delta^3(\delta'(\varphi))^{\frac{3}{2}} \cdot \delta'''(\varphi). \tag{6}$$

Der Ausdruck für N bedarf eines Beweises. Nach (6) § 16 ist:

$$\begin{aligned}\delta'''(\varphi) &= \frac{1}{\delta}\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{e\,du + f\,dv}{ds}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{f\,du + g\,dv}{ds}\right)\right] \\ &= \frac{1}{\delta}\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{e}\cos\Theta_1\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{g}\cos\Theta_2\right)\right].\end{aligned}$$

Führt man die Differentiation aus und benutzt die Formeln (6) und (8) § 16, (5) § 14 und (1) § 15, so erhält man:

$$\delta'''(\varphi) = \frac{\delta(N_1\,dv - N_2\,du)}{ds^3} = -\frac{N}{ds^3} = -\frac{\sin H}{r}\,^{1}) \quad \text{(q. e. d.)}. \tag{6a}$$

Die Function $\delta'''(\varphi)$ lässt sich durch eine andere ähnliche Function ersetzen, nämlich durch:

$$\delta''(\varphi) = \frac{1}{\delta}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{g\varphi_1 - f\varphi_2}{\delta}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{e\varphi_2 - f\varphi_1}{\delta}\right)\right]. \tag{7}$$

In der That, führt man in (5) die Differentiation in Bezug auf $\delta'(\varphi)$ aus und setzt zur Abkürzung:

$$\delta'(\varphi, \psi) = \frac{1}{\delta^2}\left[e\varphi_2\psi_2 - f(\varphi_1\psi_2 + \psi_1\varphi_2) + g\varphi_1\psi_1\right], \tag{8}$$

so ist:

$$\delta'''(\varphi) = \frac{\delta''(\varphi)}{\sqrt{\delta'(\varphi)}} - \frac{1}{2}\frac{\delta'(\varphi, \delta'(\varphi))}{(\delta'(\varphi))^{\frac{3}{2}}}. \tag{9}$$

Beltrami nennt, nach dem Vorgang von Lamé für den speciellen Fall der Ebene[2]), die Ausdrücke $\delta'(\varphi)$ und $\delta''(\varphi)$ die Differentialparameter erster[3]) und zweiter Ordnung der Function φ und $\delta'(\varphi, \psi)$ den Zwischenparameter der Functionen φ und ψ. Durch sie lässt sich nach (9) $\delta'''(\varphi)$ darstellen. Es ist zweckmässig, noch einen anderen abkürzenden Ausdruck einzuführen, nämlich:

$$\vartheta(\varphi, \psi) = \frac{1}{\delta}(\varphi_1\psi_2 - \psi_1\varphi_2). \tag{10}$$

---

1) Bonnet, Journ. d. Math. T. V. Sér. II. p. 166 (1860).

2) Lamé, Leçons sur l. coord. curvil. p. 6 (1859). Geht die Fläche in eine Ebene über und sind (u, v) rechtwinklige Parallelcoordinaten in derselben, so hat man $e = g = 1$, $f = 0$, also:

$$\delta'(\varphi) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 \qquad \delta''(\varphi) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}.$$

3) Der Differentialparameter $\delta'(\varphi)$ tritt schon bei Gauss auf, Disq. gen. Art. 22.

Derselbe lässt sich durch den Differentialparameter erster Ordnung ausdrücken, da, wie leicht zu sehen:

$$\vartheta^2(\varphi,\psi) + \delta'^2(\varphi,\psi) = \delta'(\varphi)\cdot\delta'(\psi). \tag{11}$$

Sind Φ und Ψ Functionen von (φ, ψ), so kann man $\delta'(\Phi)$, $\vartheta(\Phi, \Psi)$, $\delta'(\Phi, \Psi)$, $\delta''(\Phi)$ leicht durch $\delta'(\varphi)$, $\delta'(\psi)$, $\vartheta(\varphi, \psi)$, $\delta'(\varphi, \psi)$, $\delta''(\varphi)$, $\delta''(\psi)$, sowie durch die partiellen Ableitungen von Φ und Ψ nach φ, ψ ausdrücken, was für gewisse Transformationen erforderlich ist[1]).

Die Differentialparameter enthalten ausser den Functionen φ und ψ nur die Coefficienten e, f, g des Linienelements und bleiben ungeändert, wenn die Fläche verbogen wird. Sie spielen daher als Biegungsinvarianten (vgl. § 18) eine wichtige Rolle bei allen Problemen der Flächentheorie, die nur von der Form des Linienelementes abhängen, insbesondere auch bei dem Problem der Geometrie auf einer Fläche.

Wir geben einige Anwendungen der Differentialparameter.

Zunächst lässt sich das Linienelement ds der Fläche durch zwei Curvensysteme $\varphi = a$, $\psi = b$ ausdrücken. Setzt man nämlich $\varphi = u$, $\psi = v$, so wird:

$$\delta'(u) = \frac{g}{\delta^2} \qquad \delta'(v) = \frac{e}{\delta^2} \qquad \delta'(u,v) = -\frac{f}{\delta^2} \qquad \vartheta(u,v) = \frac{1}{\delta}$$

oder

$$e = \frac{\delta'(v)}{\vartheta^2(u,v)} \qquad f = -\frac{\delta'(u,v)}{\vartheta^2(u,v)} \qquad g = \frac{\delta'(u)}{\vartheta^2(u,v)}. \tag{12}$$

Daher

$$ds^2 = \frac{\delta'(v)du^2 - 2\delta'(u,v)du\,dv + \delta'(u)dv^2}{\vartheta^2(u,v)}$$

oder wegen der invarianten Eigenschaft der Differentialparameter (vgl. § 18), wenn man die allgemeinen Parameter φ, ψ statt u, v einführt:

$$ds^2 = \frac{\delta'(\psi)d\varphi^2 - 2\delta'(\varphi,\psi)d\varphi\,d\psi + \delta'(\varphi)d\psi^2}{\vartheta^2(\varphi,\psi)}. \tag{13}$$

Ferner ist nach (8) § 1 der Winkel (φ, ψ), den zwei Flächencurven $\varphi = a$ und $\psi = b$ mit einander bilden, bestimmt durch:

$$\cos(\varphi,\psi) = \frac{\delta'(\varphi,\psi)}{\sqrt{\delta'(\varphi)\delta'(\psi)}} \qquad \sin(\varphi,\psi) = \frac{\vartheta(\varphi,\psi)}{\sqrt{\delta'(\varphi)\delta'(\psi)}}. \tag{14}$$

Hiernach ist $\delta'(\varphi, \psi) = 0$ die Bedingung dafür, dass zwei Curven $\varphi = a$ und $\psi = b$ orthogonal sich schneiden. Wir benutzen dies, um

1) Beltrami, Giorn. II. p. 367.

die Differentialparameter des zu dem Curvensystem $\varphi = a$ (mit dem Parameter a) orthogonalen Systems, das mit $\psi = b$ bezeichnet sei, durch die Differentialparameter von φ auszudrücken. Nach Voraussetzung ist:

$$\psi_2(e\varphi_2 - f\varphi_1) - \psi_1(f\varphi_2 - g\varphi_1) = 0$$

oder, wenn μ ein Proportionalitätsfactor ist,

$$\psi_1 = \mu(e\varphi_2 - f\varphi_1) \qquad -\psi_2 = \mu(g\varphi_1 - f\varphi_2)$$

oder

$$e\psi_2 - f\psi_1 = -\delta^2\mu\varphi_1 \qquad g\psi_1 - f\psi_2 = \delta^2\mu\varphi_2.$$

Daher ist nach (4) und (5):

$$\delta'(\psi) = -\mu(\varphi_1\psi_2 - \psi_1\varphi_2) = \delta^2\mu^2\delta'(\varphi), \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\delta'''(\psi) &= \frac{1}{\delta}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\varphi_2}{\sqrt{\delta'(\varphi)}}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\varphi_1}{\sqrt{\delta'(\varphi)}}\right)\right] \\ &= -\frac{1}{2}(\delta'(\varphi))^{-\frac{3}{2}}\left[\varphi_2\frac{\partial\delta'(\varphi)}{\partial u} - \varphi_1\frac{\partial\delta'(\varphi)}{\partial v}\right],\end{aligned} \tag{16}$$

wovon wir später Gebrauch machen.

Wir betrachten weiter Curvensysteme $\varphi = a$ von bestimmtem Charakter; man hat unmittelbar die Sätze:

I. $\delta'(\varphi) = 0$ ist die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $\varphi = a$ ein System von Minimallinien ist.

II. $\delta'''(\varphi) = 0$ ist die Bedingung dafür, dass $\varphi = a$ ein System von geodätischen Linien ist und

$\delta'''(\varphi) = F(\varphi)$ die Bedingung dafür, dass $\varphi = a$ ein System von Linien mit constanter geodätischer Krümmung ist; endlich ist

III. $\delta'(\varphi) = F(\varphi)$ die Bedingung dafür, dass $\varphi = a$ ein System von geodätisch Parallelen und

$\delta'(\varphi) = 1$ die Bedingung dafür, dass $\varphi = a$ ein System von geodätisch Parallelen und dass gleichzeitig φ die Bogenlänge der zugehörigen geodätischen Linien ist[1]).

Das letztere bedarf eines Beweises. Ist $\varphi = a$ ein System von geodätisch Parallelen und $\psi = b$ das System der zugehörigen, orthogonalen geodätischen Linien und soll zugleich φ die Bogenlänge der geodätischen Linien sein, gemessen von derselben geodätisch Parallelen an, so führt die Aufgabe, das System $\varphi = a$ zu bestimmen, darauf,

1) Gauss, Disq. gen. Art. 22. Beltrami, Giorn. II. p. 277.

drei Functionen φ, ψ, Q von u, v zu ermitteln derart, dass das Quadrat des Linienelements die Form erhält:

$$(17) \qquad ds^2 = edu^2 + 2fdudv + gdv^2 = d\varphi^2 + Qd\psi^2.$$

Man hat also:

$$e = \varphi_1^2 + Q\psi_1^2 \qquad f = \varphi_1\varphi_2 + Q\psi_1\psi_2 \qquad g = \varphi_2^2 + Q\psi_2^2.$$

Die Elimination der zwei Grössen $\sqrt{Q}\psi_1$ und $\sqrt{Q}\psi_2$ führt auf eine partielle Differentialgleichung in φ, nämlich:

$$(18) \qquad e\varphi_2^2 - 2f\varphi_1\varphi_2 + g\varphi_1^2 = \delta^2 \qquad \text{oder} \qquad \delta'(\varphi) = 1.$$

Lässt man die Bedingung, dass φ die Bogenlänge der orthogonalen geodätischen Linien sei, fallen, und führt für φ eine beliebige Function φ' von φ ein, so hat man:

$$\varphi = \int \frac{d\varphi'}{\sqrt{F(\varphi')}}, \qquad \text{also} \qquad \varphi_1 = \frac{\varphi_1'}{\sqrt{F(\varphi')}} \qquad \varphi_2 = \frac{\varphi_2'}{\sqrt{F(\varphi')}}.$$

Hierdurch geht (18) über in $\delta'(\varphi') : F(\varphi') = 1$ (q. e. d.).

Nach der zweiten Gleichung (6) können die Minimallinien ebensowohl als geodätisch Parallele wie als geodätische Linien betrachtet werden (vgl. § 4).

In ähnlicher Weise behandelt man die Aufgabe, auf der Fläche Systeme von isometrischen Linien (Isothermen) zu bestimmen. Sind $\varphi = a$ und $\psi = b$ die beiden Schaaren eines isometrischen Systems, so kommt die Lösung der Aufgabe (vgl. § 3) darauf hinaus, das Linienelement auf die Form zu bringen:

$$(19) \qquad ds^2 = edu^2 + 2fdudv + gdv^2 = e_0 d\varphi^2 + g_0 d\psi^2,$$

wo e_0 und g_0 Functionen von φ und ψ sind mit der Bedingung:

$$\frac{\partial^2 \log}{\partial\varphi\,\partial\psi}\left(\frac{g_0}{e_0}\right) = 0 \qquad \text{oder} \qquad \frac{\partial \log}{\partial\varphi}\left(\frac{g_0}{e_0}\right) = 2F(\varphi),$$

und $F(\varphi)$ eine Function von φ allein ist. Nun hat man, wenn die mit den Grössen e_0, g_0 gebildeten Differentialparameter mit dem unteren Index 0 bezeichnet werden, nach (4) und (7):

$$\delta_0'(\varphi) = \frac{1}{e_0} \qquad \delta_0''(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{e_0 g_0}} \frac{\partial}{\partial\varphi} \sqrt{\frac{g_0}{e_0}} = \frac{1}{2e_0} \frac{\partial \log}{\partial\varphi}\left(\frac{g_0}{e_0}\right).$$

Hieraus folgt:

$$(20) \qquad \frac{\delta_0''(\varphi)}{\delta_0'(\varphi)} = \frac{1}{2} \frac{\partial \log}{\partial\varphi}\left(\frac{g_0}{e_0}\right) = F(\varphi) \qquad \text{oder} \qquad \frac{\delta''(\varphi)}{\delta'(\varphi)} = F(\varphi),$$

wenn man noch die invariante Natur der Differentialparameter berücksichtigt (s. § 18).

Ist $\varphi(u, v)$ irgend eine Lösung der partiellen Differentialgleichung (20), so stellt $\varphi = a$ die eine Schaar eines isometrischen Systems dar mit dem Parameter a. Die zugehörige Orthogonalschaar $\psi = b$ mit dem Parameter b ergibt sich durch Integration der Differentialgleichung:

$$\frac{1}{\delta}\left[(e\varphi_2 - f\varphi_1)\,du - (g\varphi_1 - f\varphi_2)\,dv\right] = 0, \qquad (21)$$

die sich durch Quadratur löst, da der integrirende Factor eine Function von φ allein ist, wie man mit Hilfe von (20) leicht beweist. Sind φ und ψ ermittelt, so folgen e_0 und g_0 aus $1 : e_0 = \delta'(\varphi)$, $1 : g_0 = \delta'(\psi)$.

Sollen gleichzeitig φ und ψ thermische Parameter sein, also $e_0 = g_0 = \lambda_0$, so geht die Bedingung (20) für φ über in $\delta_0''(\varphi) = 0$ oder $\delta''(\varphi) = 0$; daher wird die linke Seite in (21) ein vollständiges Differential oder ψ bestimmt sich aus:

$$d\psi = \frac{1}{\delta}\left[(e\varphi_2 - f\varphi_1)\,du - (g\varphi_1 - f\varphi_2)\,dv\right] \qquad (22)$$

und λ_0 aus $1 : \lambda_0 = \delta'(\varphi) = \delta'(\psi)$. Wir finden so den Satz[1]):

IV. $\delta''(\varphi) : \delta'(\varphi) = F(\varphi)$ ist die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $\varphi = a$ die eine Schaar eines isometrischen Systems mit dem Parameter a ist und $\delta''(\varphi) = 0$ ist die Bedingung dafür, dass $\varphi = a$ die eine Schaar eines isometrischen Systems ist und dass zugleich φ der thermische Parameter desselben ist.

Hiernach ergibt sich z. B. aus (14) § 2 der Satz:

Für Minimalflächen ($h = 0$) bilden die Schnittcurven von parallelen Ebenen die eine Schaar eines isometrischen Systems.

Aus II und IV erhält man weiter die Sätze[2]):

1. Existirt auf einer Fläche ein Curvensystem $\varphi = a$ (mit dem Parameter a), dessen Curven zugleich geodätisch parallel und von constanter geodätischer Krümmung sind, so ist das System auch isometrisch.

Denn aus $\delta'(\varphi) = F_1(\varphi)$ und $\delta'''(\varphi) = F_3(\varphi)$ folgt nach (9) $\delta''(\varphi) : \delta'(\varphi) = F(\varphi)$, da nach (8) $\delta'(\varphi, F_1(\varphi)) = F_1'(\varphi) \cdot \delta'(\varphi)$ ist.

2. Umgekehrt: Existirt auf einer Fläche ein Curvensystem $\varphi = a$ das zugleich isometrisch und geodätisch parallel ist, so sind die Curven des Systems auch von constanter geodätischer Krümmung.

---

1) Beltrami, Giorn. II. p. 369.

2) Beltrami, Giorn. III. p. 89 u. 90.

Denn aus $\delta'(\varphi) = F_1(\varphi)$ und $\delta''(\varphi) : \delta'(\varphi) = F(\varphi)$ folgt nach (9) $\delta'''(\varphi) = F_2(\varphi)$.

3. In beiden Fällen ist die Fläche auf einer Rotationsfläche abwickelbar, wobei die geodätisch Parallelen in die Parallelkreise der Rotationsfläche übergehen.

Denn in beiden Fällen war $\delta'(\varphi) = F_1(\varphi)$ und $\delta''(\varphi) = F_2(\varphi)$. Sind nun (u, v) geodätische Coordinaten, d. h. $u = a$ geodätisch Parallele, $v = b$ orthogonale Geodätische und ist ausserdem u die Bogenlänge der geodätischen Linien, gezählt von einer der geodätisch Parallelen, so ist $ds^2 = du^2 + g dv^2$; folglich:

$$\delta'(u) = 1 \qquad \delta''(u) = \frac{1}{2}\frac{\partial \log g}{\partial u} = F_2(u).$$

Daher ist $g = UV$, wo U nur von u, V nur von v abhängt; mithin wird:

$$ds^2 = du^2 + UV dv^2 = du^2 + U dv_1^2,$$

d. h. das Linienelement der Fläche ist gleichzeitig das Linienelement einer Rotationsfläche (q. e. d.).

Wir geben schliesslich eine Anwendung der Differentialparameter zur Bestimmung der Strictionslinie des Curvensystems[1]) $\varphi = a$ mit dem Parameter a. Man versteht darunter den Ort der Punkte auf den Curven des Systems, für welche der Abstand von der nächsten Systemcurve ein Minimum ist. Zunächst hat man den normalen Abstand zweier Curven φ und $\varphi + d\varphi$ zu berechnen. Seien u, v und $u + du$, $v + dv$ zwei consecutive Punkte auf φ und ds das zugehörige Linienelement, ferner $u + \delta u$, $v + \delta v$ ein Punkt im Abstand δs von (u, v), durch welche die Curve $\varphi + \delta\varphi$ geht, so dass

$$\delta\varphi = \varphi_1 \delta u + \varphi_2 \delta v;$$

endlich sei ϑ der Winkel zwischen den Linienelementen ds und δs und δn der Abstand der Curven φ und $\varphi + \delta\varphi$ im Punkte (u, v). Dann hat man nach (8) § 1 und (6):

$$(23) \quad \delta n = \delta s \sin\vartheta = \delta\left[\frac{du}{ds}\delta v - \frac{dv}{ds}\delta u\right] = \frac{\varphi_1 \delta u + \varphi_2 \delta v}{\sqrt{\delta'(\varphi)}} = \frac{\delta\varphi}{\sqrt{\delta'(\varphi)}}.$$

Die Strictionslinie ist der Ort der Punkte (u, v), für welche δn ein Minimum wird; sie ist also, wenn $\delta\varphi$ als constant betrachtet wird, bestimmt durch die Bedingung $d\left(1 : \sqrt{\delta'(\varphi)}\right) = 0$ oder:

$$(24) \quad \frac{\partial\delta'(\varphi)}{\partial u} du + \frac{\partial\delta'(\varphi)}{\partial v} dv = 0 \quad \text{oder} \quad \varphi_2 \frac{\partial\delta'(\varphi)}{\partial u} - \varphi_1 \frac{\partial\delta'(\varphi)}{\partial v} = 0.$$

---

1) Beltrami, Giorn. II. p. 276 u. III. p. 230.

Diese Gleichung ist aber nach (16) identisch mit $\delta'''(\psi) = 0$, wenn $\psi = b$ das zu $\varphi = a$ orthogonale System mit dem Parameter b ist. Daher der Satz:

Die Strictionslinie eines Curvensystems $\varphi = a$ ist der Ort der Punkte, in denen je eine Curve des Orthogonalsystems $\psi = b$ die geodätische Krümmung Null hat.

§ 18. Transformation der Parameter. Anwendung.

An den Schluss dieser allgemeinen Untersuchungen von Flächen und Flächencurven stellen wir eine kurze Betrachtung über die Transformation der Parameter und über die Ausdrücke, welche einer solchen Transformation gegenüber invariant sind. Es ist geometrisch klar, dass eine Reihe von metrischen Grössen, wie die Hauptkrümmungsradien r_1 und r_2, ferner das Linienelement ds, der Winkel (C, C_1) zweier Flächencurven, endlich die den Charakter einer Flächencurve bestimmenden Grössen H, r, ϱ, R unabhängig sind von den zu Grunde gelegten Parametern u, v oder dass diese Grössen ihre Werthe nicht ändern, wenn man statt u, v beliebige neue Parameter u_0, v_0 einführt[1]). Man überzeugt sich hiervon aber auch leicht analytisch, indem man die Invarianten für die Transformation der Parameter aufsucht, d. h. die Ausdrücke, die in den alten und neuen Parametern von gleicher Bildung sind und denselben Werth haben.

Es seien

$$u_0 = \varrho(u, v) \qquad v_0 = \sigma(u, v) \tag{1}$$

die Gleichungen zwischen den alten und neuen Parametern, welche folgende Transformation bewirken:

$$x = x(u,v) = x_0(u_0, v_0) \quad y = y(u,v) = y_0(u_0, v_0) \quad z = z(u,v) = z_0(u_0, v_0) \tag{2}$$

und welche für beliebige Flächencurven $\varphi = a$, $\psi = b$, .. die Gleichungen ergeben:

$$\varphi(u, v) = \varphi_0(u_0, v_0), \qquad \psi(u, v) = \psi_0(u_0, v_0), \ldots \tag{3}$$

Wir bezeichnen alle in den neuen Parametern u_0, v_0 gebildeten Grössen mit dem unteren Index 0 und setzen die Transformationsdeterminante:

$$\frac{\partial u_0}{\partial u}\frac{\partial v_0}{\partial v} - \frac{\partial u_0}{\partial v}\frac{\partial v_0}{\partial u} = \Omega. \tag{4}$$

1) Gauss, Disq. gen. Art. 21. Weingarten, Festschrift der techn. Hochschule zu Berlin. 1884.

Zunächst ist:

$$
\begin{aligned}
e &= e_0\left(\frac{\partial u_0}{\partial u}\right)^2 + 2f_0\frac{\partial u_0}{\partial u}\frac{\partial v_0}{\partial u} + g_0\left(\frac{\partial v_0}{\partial u}\right)^2 \\
f &= e_0\frac{\partial u_0}{\partial u}\frac{\partial u_0}{\partial v} + f_0\left(\frac{\partial u_0}{\partial u}\frac{\partial v_0}{\partial v} + \frac{\partial v_0}{\partial u}\frac{\partial u_0}{\partial v}\right) + g_0\frac{\partial v_0}{\partial u}\frac{\partial v_0}{\partial v} \\
g &= e_0\left(\frac{\partial u_0}{\partial v}\right)^2 + 2f_0\frac{\partial u_0}{\partial v}\frac{\partial v_0}{\partial v} + g_0\left(\frac{\partial v_0}{\partial v}\right)^2.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Die nämlichen Gleichungen gelten, wenn e, f, g und e_0, f_0, g_0 ersetzt werden durch $\mathfrak{d}, \mathfrak{d}', \mathfrak{d}''$ und $\mathfrak{d}_0, \mathfrak{d}_0', \mathfrak{d}_0''$ oder auch E, F, G und E_0, F_0, G_0. Aus diesen Gleichungen folgt unmittelbar:

$$
\frac{\delta^2}{\delta_0^2} = \frac{eg - f^2}{e_0 g_0 - f_0^2} = \frac{\mathfrak{d}\mathfrak{d}'' - \mathfrak{d}'^2}{\mathfrak{d}_0\mathfrak{d}_0'' - \mathfrak{d}_0'^2} = \frac{e\mathfrak{d}'' - 2f\mathfrak{d}' + g\mathfrak{d}}{e_0\mathfrak{d}_0'' - 2f_0\mathfrak{d}_0' + g_0\mathfrak{d}_0} = \Omega^2, \tag{6}
$$

d. h. die mittlere Krümmung h und das Krümmungsmaass k sind invariant gegenüber der Transformation der Parameter. Dasselbe gilt von den Cosinus a, b, c, welche die Richtung der Flächennormale bestimmen. Dies sind die wichtigsten Invarianten, die bei der Untersuchung der Fläche selber auftreten. Ebenso bleiben die partiellen Differentialgleichungen (6) und (10) § 7 zwischen den sechs fundamentalen Grössen e, f, g; $\mathfrak{d}, \mathfrak{d}', \mathfrak{d}''$ bei der Transformation erhalten[1]).

Aus (5) folgt weiter:

$$
\begin{aligned}
edu + fdv &= (edu_0 + fdv_0)\frac{\partial u_0}{\partial u} + (fdu_0 + gdv_0)\frac{\partial v_0}{\partial u} \\
fdu + gdv &= (edu_0 + fdv_0)\frac{\partial u_0}{\partial v} + (fdu_0 + gdv_0)\frac{\partial v_0}{\partial v}
\end{aligned} \tag{7}
$$

nebst den entsprechenden Gleichungen, gebildet in $\mathfrak{d}, \mathfrak{d}', \mathfrak{d}''$ oder in E, F, G. Hieraus folgt:

$$
ds = ds_0 \qquad L = L_0 \qquad M = M_0 \qquad N = N_0,^2)
$$

d. h. die metrischen Grössen H, r, ϱ, R sind invariant für die Transformation der Parameter.

Ebenso sind invariant der Ausdruck für dS, der Ausdruck P (16) § 14 und der in (8) § 1 auftretende Ausdruck:

$$
edud_1u + f(dud_1v + dvd_1u) + gdvd_1v. \tag{8}
$$

Dies sind die wichtigsten Invarianten, die bei der Untersuchung einer Flächencurve auftreten. Ausserdem sind invariant die Ausdrücke, die sich aus N ergeben, wenn man e, f, g ersetzt durch $\mathfrak{d}, \mathfrak{d}', \mathfrak{d}''$ oder durch E, F, G.

1) Genaueres: Weingarten, l. c. p. 19.

2) Auch der Beweis der letzten Gleichung $N = N_0$ ist mittels einiger Rechnung leicht zu führen.

An Stelle dieser Invarianten treten die Differentialparameter und verwandte Formen, wenn man die Flächencurve durch eine Gleichung $\varphi(u, v) = a$ definirt. Es ist:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial u_0}\frac{\partial u_0}{\partial u} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial v_0}\frac{\partial v_0}{\partial u} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial u_0}\frac{\partial u_0}{\partial v} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial v_0}\frac{\partial v_0}{\partial v}. \tag{9}$$

Hiernach folgt aus (5) und (6):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta}\left(e\frac{\partial \varphi}{\partial v} - f\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) &= \frac{1}{\delta_0}\left[\left(e_0\frac{\partial \varphi_0}{\partial v_0} - f_0\frac{\partial \varphi_0}{\partial u_0}\right)\frac{\partial u_0}{\partial u} + \left(f_0\frac{\partial \varphi_0}{\partial v_0} - g_0\frac{\partial \varphi_0}{\partial u_0}\right)\frac{\partial v_0}{\partial u}\right] \\ \frac{1}{\delta}\left(f\frac{\partial \varphi}{\partial v} - g\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) &= \frac{1}{\delta_0}\left[\left(e_0\frac{\partial \varphi_0}{\partial v_0} - f_0\frac{\partial \varphi_0}{\partial u_0}\right)\frac{\partial u_0}{\partial v} + \left(f_0\frac{\partial \varphi_0}{\partial v_0} - g_0\frac{\partial \varphi_0}{\partial u_0}\right)\frac{\partial v_0}{\partial v}\right]. \end{aligned} \tag{10}$$

Daher ist zunächst $\delta'(\varphi) = \delta_0'(\varphi_0)$, wo δ_0' der mit den Grössen e_0, f_0, g_0 gebildete Differentialparameter erster Ordnung ist. Ferner folgt, wenn man die erste der Gleichungen (10) nach v, die zweite nach u differentiirt und subtrahirt: $\delta''(\varphi) = \delta_0''(\varphi_0)$. Man hat also:

$$\delta'(\varphi) = \delta_0'(\varphi_0) \qquad \delta'(\varphi, \psi) = \delta_0'(\varphi_0, \psi_0) \qquad \delta''(\varphi) = \delta_0''(\varphi_0) \tag{11}$$

und damit auch:

$$\vartheta(\varphi, \psi) = \vartheta_0(\varphi_0, \psi_0) \qquad \delta'''(\varphi) = \delta_0'''(\varphi_0).$$

Es sind also invariant die Differentialparameter erster und zweiter Ordnung; ebenso aber sind invariant die Ausdrücke, die man aus ihnen erhält, wenn man die Grössen e, f, g ersetzt durch d, d', d'' oder durch E, F, G.

Unter den aufgezählten Invarianten befinden sich insbesondere die sog. Biegungsinvarianten[1]), d. h. solche Invarianten, die zugleich bei einer Verbiegung der Fläche ungeändert bleiben.

Wir betrachten nicht wie bisher ein und dieselbe Fläche (x, y, z), bezogen auf zwei verschiedene Parametersysteme u, v und u_0, v_0, sondern zwei verschiedene Flächen (x, y, z) und (x', y', z') bezogen auf dasselbe Parametersystem (u, v). Dann gelten die Gleichungen und Definitionen am Schluss von § 5.

Biegungsinvarianten sind nun diejenigen unter den oben betrachteten Invarianten, welche nur die drei fundamentalen Grössen e, f, g und ihre Ableitungen, aber nicht die Grössen d, d', d'' enthalten. Zu ihnen gehört erstens der Ausdruck für das Krümmungsmaass k,[2]) ferner die Ausdrücke ds, N und der Ausdruck (8), die noch die Differentiale von u und v enthalten, endlich dementsprechend die

1) Beltrami, Giorn. II. p. 356.
2) Gauss, Disq. gen. Art. 12.

Differentialparameter $\delta'(\varphi)$, $\delta'(\varphi, \psi)$, $\delta''(\varphi)$, welche noch die Ableitungen von φ und ψ nach u, v enthalten. Von metrischen Grössen sind also Biegungsinvarianten ausser dem Krümmungsmaass der Fläche, die geodätische Krümmung einer Flächencurve[1]) und der Winkel zweier Flächencurven, wie auch geometrisch klar ist.

Es ist klar, dass man weitere Biegungsinvarianten erhält, indem man die Prozesse ϑ, δ' und δ'' an einer oder mehreren Functionen $\varphi, \psi, \ldots$ wiederholt. Umgekehrt lässt sich auf diese Weise jede Biegungsinvariante darstellen[2]). In der That, ist:

$$J = F\left(e, \frac{\partial e}{\partial u}, \cdots, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \cdots, \psi, \frac{\partial \psi}{\partial u}, \cdots\right) \tag{12}$$

eine allgemeine Biegungsinvariante, welche $e, f, g, \varphi, \psi, \ldots$ mit Ableitungen nach u, v enthält, so kann man alle Elemente derselben darstellen durch wiederholte Anwendung der Operationen ϑ und δ' auf die Functionen $u, v, \varphi, \psi, \ldots$ Denn nach (12) § 17 drücken sich e, f, g, δ aus durch $\delta'(u)$, $\delta'(v)$, $\vartheta(u, v)$ und nach (10) § 17 ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \delta\vartheta(\varphi, v) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \delta\vartheta(u, \varphi), \tag{13}$$

also

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} = \delta\vartheta\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}, v\right) = \delta\vartheta[\delta\vartheta(\varphi, v), v] \quad \text{u. s. w.}$$

Führt man nun statt u und v zwei der in J auftretenden Functionen φ und ψ ein, so hat man die angegebene Darstellung von J. Geht nur eine Function φ in J ein, so kann man u und v durch φ und $\delta'\varphi$ oder $\delta''\varphi$ ersetzen und erhält demnach alle Invarianten einer einzigen Function φ durch wiederholte Anwendung der Prozesse δ' und δ'' angewandt auf diese Function.

Als Anwendung der Formeln für die Biegungsinvarianten entwickeln wir die Kriterien dafür, dass zwei in beliebigen Parametern gegebene Flächen

$$x = x(u, v) \qquad y = y(u, v) \qquad z = z(u, v) \tag{14}$$

und

$$x_0 = x_0(u_0, v_0) \qquad y_0 = y_0(u_0, v_0) \qquad z_0 = z_0(u_0, v_0) \tag{15}$$

1) Minding, Journ. für Math. VI. p. 159 (1830).
2) Darboux, Leçons. III. p. 204.

auf einander abwickelbar sind[1]). Die beiden Flächen werden Punkt für Punkt auf einander bezogen durch zwei Gleichungen zwischen den Parametern (u, v) und (u_0, v_0)

$$\varphi(u, v) = \varphi_0(u_0, v_0) \qquad \psi(u, v) = \psi_0(u_0, v_0) \tag{16}$$

mit der Bedingung, dass φ und ψ von einander unabhängige Functionen sind, dass also die Determinante $\varphi_1\psi_2 - \psi_1\varphi_2$ nicht identisch verschwindet. Alsdann sind die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Abwickelbarkeit der Flächen (14) und (15) auf einander enthalten in den drei Gleichungen (5). Es ist zweckmässig, diesen Bedingungen eine andere Form zu geben. Führt man nämlich auf der Fläche (14) φ und ψ und auf (15) φ_0 und ψ_0 als Parameter ein, so erhält man aus der Form (13) § 17 des Linienelementes als nothwendige und hinreichende Bedingungen der Abwickelbarkeit

$$\delta'(\varphi) = \delta_0'(\varphi_0) \qquad \delta'(\psi) = \delta_0'(\psi_0) \qquad \delta'(\varphi, \psi) = \delta_0'(\varphi_0, \psi_0), \tag{17}$$

wo die mit dem Index 0 versehenen Differentialparameter sich auf die Fläche (15) beziehen.

Angenommen, die durch die Gleichungen (16) auf einander bezogenen Flächen (14) und (15) seien auf einander abwickelbar, dann müssen in entsprechenden Punkten nothwendig das Krümmungsmaass k und die aus ihm gebildeten Differentialparameter erster und zweiter Ordnung denselben Werth haben oder es muss sein

$$k = k_0 \qquad \delta'(k) = \delta_0'(k_0) \qquad \delta''(k) = \delta_0''(k_0) \qquad \delta'''(k) = \delta_0'''(k_0), \tag{18}$$

wo die dritte oder vierte Gleichung eine Folge der drei übrigen ist.

Die erste dieser Gleichungen $k = k_0$ sagt aus, dass die Curven von gleichem constantem Krümmungsmaass $k =$ const. auf beiden Flächen einander entsprechen; die zweite, dass auf diesen Curven $k =$ const. solche Punkte einander entsprechen, für welche der normale Abstand dn zwischen den Curven k und $k + dk$ derselbe ist (vgl. (23) § 17); die dritte oder vierte, dass in den sich entsprechenden Punkten auch die geodätische Krümmung der Curve $k =$ const. dieselbe ist (vgl. (6a) § 17).

Es fragt sich nun umgekehrt, ob und unter welchen Bedingungen zu den gegebenen Gleichungen (14) und (15) sich zwei Gleichungen der Form (16) finden lassen so, dass φ und ψ (und folglich auch φ_0

1) Minding, Journ. für Math. Bd. 19. p. 180 (1839). Monge-Liouville, Applications. Note IV u. V. Bonnet, Journ. Éc. Pol. Cah. 41. p. 211 ff. (1863). Die obige Darstellung schliesst sich an die Discussion von Darboux, Leçons. III. p. 223 ff. an.

und ψ_0) von einander unabhängig sind und dass zugleich die drei Gleichungen (17) befriedigt werden, oder es ist zu untersuchen, ob und inwiefern die nothwendigen Bedingungen (18) der Abwickelbarkeit auch hinreichend sind. Hierbei sind mehrere Fälle zu unterscheiden.

1. Unter der Voraussetzung, dass k und k_0 nicht constant sind und dass $\delta'(k)$ nicht Function von k, $\delta_0'(k_0)$ nicht Function von k_0 ist, setze man

$$k = k_0 \qquad \delta'(k) = \delta_0'(k_0). \tag{19}$$

Hiermit hat man zwei Gleichungen der Form (16) zwischen (u, v) und (u_0, v_0), durch welche zwei bestimmte Curvenschaaren der beiden Flächen von der oben angegebenen geometrischen Bedeutung auf einander bezogen werden. Alsdann sind die hinreichenden Bedingungen der Abwickelbarkeit die, dass durch die Gleichungen (19) auch die zwei Gleichungen

$$\delta'(\delta' k) = \delta_0'(\delta_0' k_0) \qquad \delta'(k, \delta' k) = \delta_0'(k_0, \delta_0' k_0) \tag{20}$$

erfüllt werden.

2. Ist dagegen $\delta'(k)$ Function von k, so muss offenbar, wenn Abwickelbarkeit möglich sein soll, auch $\delta_0'(k_0)$ Function von k_0 und zwar dieselbe Function sein.

Es sei also

$$\delta'(k) = f(k) \qquad \delta_0'(k) = f(k_0). \tag{21}$$

Dann geben die beiden Gleichungen (19) nur die erste der Gleichungen (16) oder nur eine Beziehung zwischen (u, v) und (u_0, v_0). Unter der Voraussetzung, dass $\delta'''(k)$ von k und $\delta_0'''(k_0)$ von k_0 unabhängig sei, füge man zu (19) die Gleichung:

$$\delta'''(k) = \delta_0'''(k_0) \tag{22}$$

hinzu.

Nach (21) sind die Flächen (14) und (15) von der besonderen Art, dass das Curvensystem $k = \text{const.}$ zugleich ein System von geodätisch Parallelen ist. Durch (21) werden diejenigen Curven der beiden Flächen auf einander bezogen, welche die Curven $k = \text{const.}$ in Punkten gleicher geodätischer Krümmung schneiden.

Nunmehr ist nach (17) die hinreichende Bedingung der Abwickelbarkeit die, dass aus den Gleichungen (19), (21) und (22) die Gleichung folgt:

$$\delta'(\delta'''(k)) = \delta_0'(\delta_0'''(k_0)). \tag{23}$$

Denn die in (17) enthaltene weitere Bedingung

$$\delta'(k, \delta'''k) = \delta_0'(k_0, \delta_0'''k_0) \tag{24}$$

ist durch (19), (21) und (22) von selber erfüllt. Dies folgt aus einer Identität für k, in welche sich die für die betrachteten Flächen charakteristische Gleichung (21) umsetzen lässt und die nur k und seine Differentialparameter enthält. Führt man nämlich auf einer beliebigen Fläche ein System von geodätischen Coordinaten (u_1, v_1) ein § 4, so nimmt das Quadrat des Linienelements die Form an

$$ds^2 = du_1^2 + g_1 dv_1^2, \tag{25}$$

wo u_1, v_1, g_1 bestimmte Functionen von (u, v) sind.

Ferner hat man, wenn die für die Form (25) gebildeten Differentialparameter den unteren Index 1 führen:

$$\delta_1'(u_1) = 1 \qquad \delta_1''(u_1) = \frac{\partial \log \sqrt{g_1}}{\partial u_1} \quad \text{und} \quad k = -\frac{1}{\sqrt{g_1}} \frac{\partial^2 \sqrt{g_1}}{\partial u_1^2}, \tag{26}$$

wo die letzte Gleichung aus § 9 Gl. 4 entnommen ist.

Die Elimination von g_1 gibt die für jede Fläche gültige Relation:

$$\delta_1'(u_1, \delta_1''u_1) = -k - [\delta_1''u_1]^2. \tag{27}$$

Für die durch (21) charakterisirten Flächen ist nun $k = \text{const.}$ ein System von geodätisch Parallelen. Führt man dies System an Stelle von $u_1 = \text{const.}$ in (25) ein, so ergibt sich durch Vergleichung von (25) mit (13) § 17 in Verbindung mit (15) § 17 und mit Rücksicht auf die invariante Natur der Differentialparameter

$$u_1 = \int^k \frac{dk}{\sqrt{\delta'(k)}} = \int^k \frac{dk}{\sqrt{f(k)}}. \tag{28}$$

Trägt man diesen Werth in (27) ein, so erhält man, da die Differentialparameter invariant sind und da

$$\delta''\left(\int^k \frac{dk}{\sqrt{\delta' k}}\right) = \delta'''(k),$$

also

$$\delta'\left(\int^k \frac{dk}{\sqrt{\delta' k}}, \ \delta''\int^k \frac{dk}{\sqrt{\delta' k}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\delta' k}}\, \delta'(k, \delta'''k)$$

ist, die gesuchte Identität für k:

$$\frac{1}{\sqrt{\delta' k}}\, \delta'(k, \delta'''k) = -k - (\delta''k)^2. \tag{29}$$

Hieraus aber folgt wegen (19) und (22) die Gleichung (24) (q. e. d.).

3. Ist nicht nur $\delta'(k) = f(k)$, sondern auch $\delta'''(k) = f_1(k)$, so erfordert zunächst die Abwickelbarkeit, dass ausser $\delta'_0(k_0) = f(k_0)$ auch

$\delta_0'''(k_0) = f_1(k_0)$ ist. Diese Voraussetzungen sind schon hinreichend für die Abwickelbarkeit und die letztere ist zudem auf unendlich viele Arten möglich. Dies und die zu $k = k_0$ hinzutretende zweite Gleichung zwischen (u, v) und (u_0, v_0) ergibt sich folgendermassen.

Die Bedingung $\delta'''(k) = f_1(k)$ charakterisirt die Fläche (14) weiter dahin, dass die bereits auf einander bezogenen geodätisch Parallelen $k =$ const. zugleich Curven von constanter geodätischer Krümmung sind. Legt man wieder die Form (25) des Linienelementes zu Grunde, so führt diese Bedingung auch zu einer Werthbestimmung der Grösse g_1 durch Quadratur. Aus $\delta'''(k) = f_1(k)$ folgt nämlich:

$$(30) \qquad \delta_1''(u_1) = \frac{\partial \log \sqrt{g_1}}{\partial u_1} = \varphi_1(u_1), \quad \text{woraus} \quad \sqrt{g_1} = U_1,$$

d. h. $\sqrt{g_1}$ ist gleich einer bestimmten Function von u_1, wenn v_1 passend gewählt wird.

Daher ist jetzt für (14)

$$(31) \qquad ds^2 = du_1^2 + U_1^2 dv_1^2,$$

wo v_1 eine bestimmte Function von (u, v) ist. Das Linienelement der Fläche (15) aber hat, da k oder u_1 und $\delta'''(k)$ oder U_1 für beide Flächen dasselbe ist, die Form

$$ds = du_1^2 + U_1^2 dv_2^2,$$

wo v_2 eine bestimmte Function von (u_0, v_0) ist. Indem man $dv_1^2 = dv_2^2$ oder

$$(32) \qquad v_1 = \pm v_2 + c$$

setzt, wo c eine willkürliche Constante, hat man die zweite Relation zwischen (u, v) und (u_0, v_0). Die Abwickelung ist wegen der willkürlichen Constanten c auf einfach unendlich viele Arten möglich. In der That ist sie bestimmt, wenn man einen beliebigen Punkt p_1 der ersten Fläche, durch den eine Curve $k = a$ geht, einem beliebigen Punkt p_2 auf der entsprechenden Curve $k = a$ der zweiten Fläche zuordnet. Das Doppelzeichen von v_2 in (32) sagt aus, dass man die Verbiegung der zweiten Fläche auf die erste nach der einen oder der anderen Seite der Curve $k = a$ vornehmen kann.

Die hier behandelten, auf einander abwickelbaren Flächen sind zugleich nach (31) auf einer Rotationsfläche abwickelbar. Dabei entsprechen den Meridiancurven die Curven $v_1 =$ const., den Parallelkreisen die Curven $u_1 =$ const. oder $k =$ const.

Die Herstellung der Gleichung (31) oder die Bestimmung der Grössen u_1, U_1 und v_1 als Functionen von (u, v) erfordert nur Qua-

draturen. Denn u_1 ist aus (28), U_1 aus (30) bekannt und v_1 folgt nach (31) aus

$$dv_1 = \frac{1}{U_1}\sqrt{ds^2 - du_1^2}.$$

Dasselbe ergibt sich daraus, dass das System $k =$ const. zugleich geodätisch parallel und von constanter geodätischer Krümmung ist; es ist also nach Satz 1 p. 103 auch isometrisch und die zugehörige Orthogonalschaar wird nach (21) § 17 durch Quadratur erhalten.

4. Endlich kann der Fall eintreten, dass das Krümmungsmaass k der Fläche (14) nicht Function von (u, v), sondern eine Constante ist. Dann ist zur Abwickelbarkeit nothwendig, dass auch auf der Fläche (15) das Krümmungsmaass constant ist und denselben Werth hat. Diese Bedingung aber ist auch hinreichend für die Abwickelbarkeit, die auch hier, nur in anderer Weise, auf unendlich viele Arten möglich ist.

Führt man nämlich auf den Flächen (14) und (15) geodätische Polarcoordinaten ein (§ 4), so hat das Quadrat des Linienelementes die Form

$$ds^2 = du_1^2 + g_1 dv_1^2 \qquad ds^2 = du_2^2 + g_2 dv_2^2 \tag{33}$$

und g_1 und g_2 sind nach (4) § 9 bestimmt durch die Gleichungen

$$\frac{\partial^2\sqrt{g_1}}{\partial u_1^2} + k\sqrt{g_1} = 0 \qquad \frac{\partial^2\sqrt{g_2}}{\partial u_2^2} + k\sqrt{g_2} = 0.$$

Daher ist

$$\begin{array}{llll} \sqrt{g_1} \text{ gleich } \sin(u_1\sqrt{k}) & \sin h\,(u_1\sqrt{k})^{1}) & u_1 \\ \sqrt{g_2} \quad \text{„} \quad \sin(u_2\sqrt{k}) & \sin h\,(u_2\sqrt{k}) & u_2 \end{array} \tag{34}$$

je nachdem

$$\begin{array}{llll} k & >0 & <0 & =0. \end{array}$$

Wenn die Pole der Polarsysteme auf beiden Flächen sich entsprechen sollen, so hat man $u_1 = u_2$ zu setzen, da diese Werthe gleiche geodätische Längen darstellen. Dann folgt aus (33) $dv_1^2 = dv_2^2$ oder $v_1 = \pm v_2 + c$.

Dies gibt den Satz:

Haben zwei Flächen gleiches constantes Krümmungsmaass, so sind sie auf dreifach unendlich viele Arten auf einander abwickelbar.

Man kann nämlich zwei Punkte p_1 und q_1 der ersten Fläche zwei Punkten p_2 und q_2 der zweiten Fläche ganz beliebig zuordnen, vor-

1) wo $\sin h(u) = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$.

ausgesetzt nur, dass der geodätische Abstand dieser Punktepaare auf beiden Flächen derselbe ist.

Die Flächen von constantem Krümmungsmaass k sind nach (33) und (34) auf Rotationsflächen von demselben constanten Krümmungsmaass k abwickelbar, für $k = 0$ auf dem Rotationscylinder oder der Ebene, für $k > 0$ auf der Kugel, für $k < 0$ auf der Pseudosphäre, deren einfachster Typus die Tractrix (Evolvente der Kettenlinie) zur Meridiancurve hat.

Die Herstellung der Form (33) oder die Bestimmung der geodätischen Linien auf einer Fläche von constantem Krümmungsmaass erfordert die Integration einer Riccati'schen Differentialgleichung[1]).

1) Darboux, Leçons. III. p. 223.

Berichtigungen und Zusätze.

S. 8. Z. 20 v. o. hinter positiv ist hinzuzufügen: wie aus (23) § 1 folgt.
S. 9. Z. 2 v. u. statt Relationsellipsoid zu lesen: Rotationsellipsoid.
S. 17. Z. 16 v. o. hinter Linie zuzufügen: $dr = 0$, also:
S. 27. Z. 8 v. o. statt Meridiancurve zu lesen: Meridianebene.
S. 35. Z. 12 v. o. zu streichen: ihre conjugirten Durchmesser sind alle endlich.
S. 38. Z. 7 v. o. in der zweiten Gleichung statt $\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{r_2}\right)$ zu lesen $\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{r_2}\right)$.
S. 40. Anm. 1. Die hier angezeigte Note erscheint nicht mehr im Journal für Mathematik, da die Herausgabe dieses Schriftchens den Druck des Journals überholt hat.
S. 43. Z. 11 v. o. hinzuzufügen: Diese Bemerkung ist von Wichtigkeit für gewisse Biegungsprobleme, wie u. a. für das Problem: Eine gegebene Fläche so zu deformiren, dass eine auf ihr gelegene Curve in eine beliebig vorgegebene Raumcurve übergeht. Vgl. Darboux, Leçons III. p. 277; in anderer Behandlung Weingarten, Journ. für Math. Bd. 100. p. 296 (1886).
S. 61. Z. 11 v. o. hinter beweisen zuzufügen: Ebenso folgt leicht aus den Gleichungen (6) § 7, dass auch die Asymptotenlinien isometrisch sind.
S. 63. Z. 5 v. u. statt ihre Integrale zu lesen: zwischen ihren Integralen.
S. 68. Gl. (27) statt $\cos\varphi$ zu lesen $\sin\varphi$ und statt $\sin\varphi$ zu lesen $\cos\varphi$.
S. 68. Z. 11 v. u. statt s zu lesen $\frac{s}{2}$.
S. 71. Z. 7 v. o. statt welcher zu lesen welchen.
S. 80. Z. 12 v. o. statt Tangenten — zu lesen Tangenten.
S. 85. Gl. (7) statt λ zu lesen h.

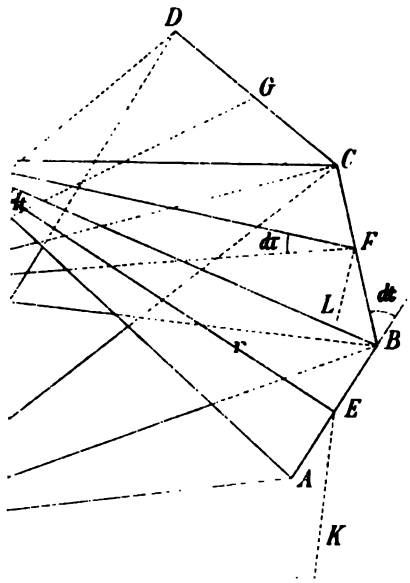

Fig. 1.

Richtungscosinus von

$AB = \alpha, \beta, \gamma.$

$EM = l, m, n.$

$EK = \lambda, \mu, \nu.$

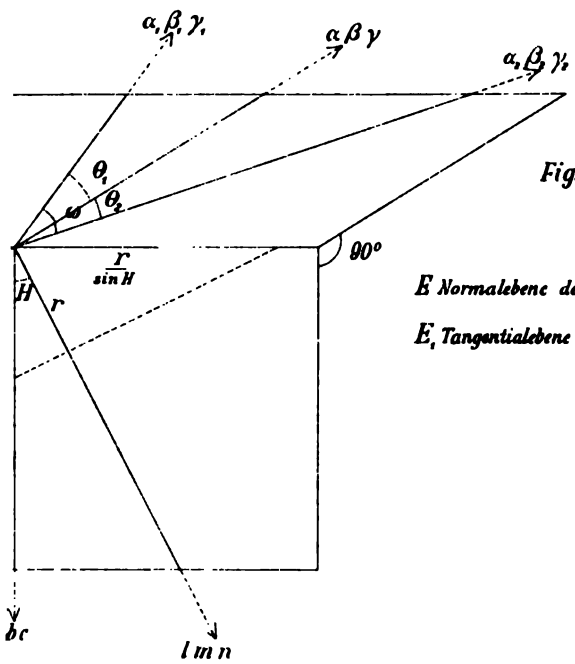

Fig. 2.

E Normalebene der Flächencurve.

E_1 Tangentialebene der Fläche.

Stanford University Libraries
3 6105 002 053 705

QA
641
S8

DATE DUE			

STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
STANFORD, CALIFORNIA 94305-6004